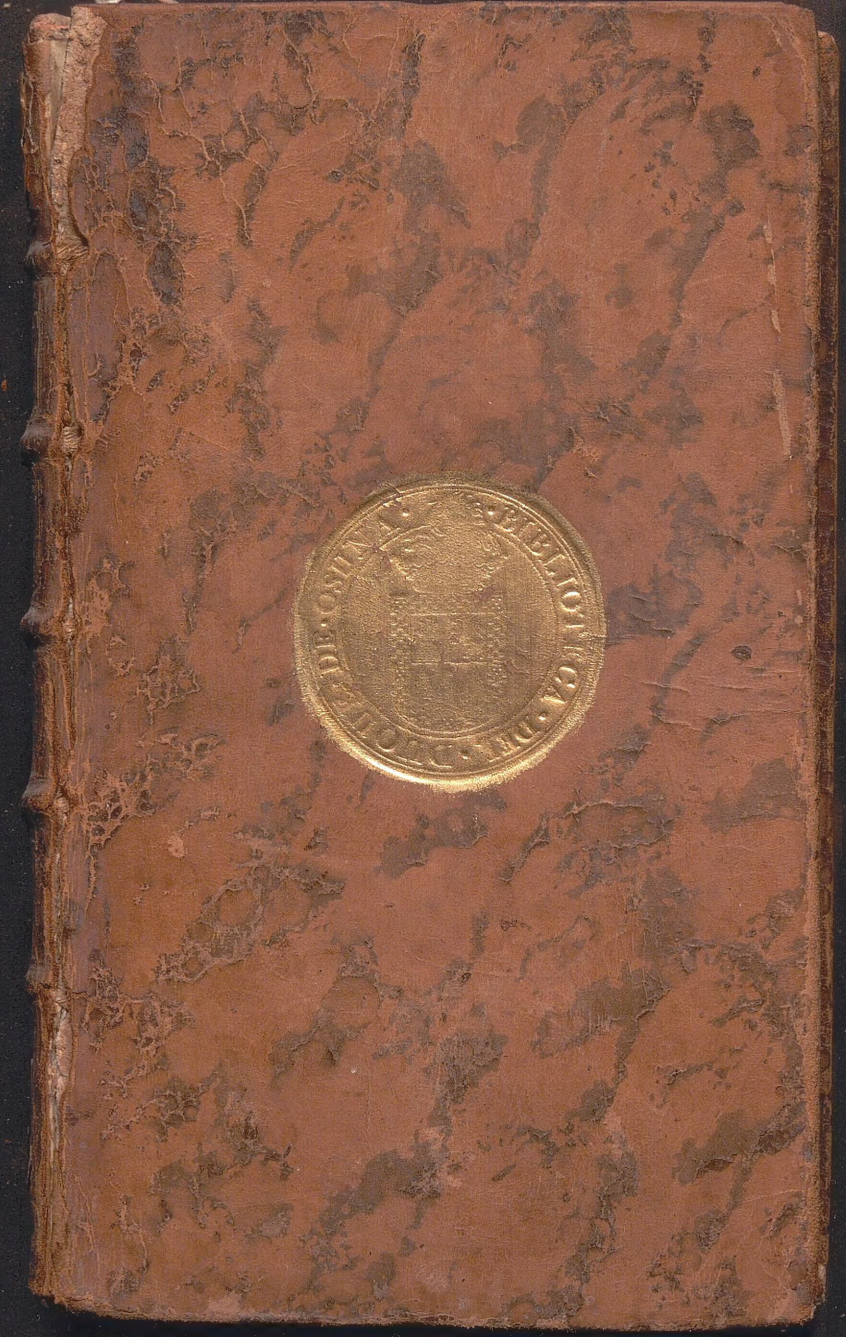

BIBLIOTECA · DEL · DUQUE · DE · OSUNA





S.C. ~~31=6~~ 29–8

Sch 22
Nr 30



HISTOIRE
DES RECHERCHES
SUR LA
QUADRATURE
DU CERCLE;

Ouvrage propre à instruire des découvertes réelles faites sur ce problême célébre, & à servir de préservatif contre de nouveaux efforts pour le résoudre :

Avec une Addition concernant les problêmes de la duplication du cube & de la trisection de l'angle.



A PARIS,

Chez CH. ANT. JOMBERT, Imprimeur-Libraire du Roi en son Artillerie, rue Dauphine, à l'Image Notre Dame.

M. DCC. LIV.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA



PRÉFACE.

IL eſt dans les Sciences certaines recherches qu'on pourroit à juſte titre appeller les écueils de l'eſprit humain. Parmi celles à qui mille efforts inutiles ont acquis ce nom, la Quadrature du cercle eſt des plus célebres; ce n'eſt pas, on ſe hâte de le dire, que la Géométrie ne préſente des queſtions plus utiles, plus intéreſſantes, & à certains égards plus difficiles. Mais trop relevées pour ceux qui n'ont pas fait de grands progrès dans cette ſcience, elles ne ſont guères connues que du petit nombre de ceux qui ſe ſont rendu familieres les nouvelles méthodes & les découvertes que nous devons au dernier ſiécle.

A l'égard de la Quadrature du cercle, il s'en faut beaucoup que sa célébrité soit renfermée dans des bornes si étroites : plus fameuse, & de bien plus grande importance aux yeux de ceux à qui la Géométrie n'est connue que de nom, ou qui y sont à peine initiés, qu'auprès des Geometres habiles ou intelligens, elle ne cesse d'exciter des efforts infructueux ; aucun problême n'a été tenté à plus de reprises, avec des forces plus inégales & plus disproportionnées à sa difficulté. La plupart de ceux qui se livrent à cette recherche, ont à peine une idée claire de la question, & des moyens qui y conduisent, & qui sont les seuls qu'admet l'esprit géométrique ; c'est cependant de là que partent ces fréquens & pompeux programmes, qui annoncent au public cette découverte brillante & inespérée, qui félicitent leur

ſiécle de voir enfin éclore ce chef-d'œuvre de l'intelligence humaine. La claſſe la plus élémentaire de la Géométrie eſt depuis longtems tellement en poſſeſſion de fournir ſeule ces heureux Œdipes, que s'annoncer aujourd'hui comme étant en poſſeſſion, ou occupé à la recherche de ce problême, c'eſt élever contre ſoi le préjugé le plus légitime d'ignorance ou de foibleſſe d'eſprit.

Malgré l'étendue que ſemblent acquerir de plus en plus les connoiſſances mathématiques, il eſt ſi peu de perſonnes, hors les Mathématiciens de profeſſion, qui conçoivent avec netteté ce dont il s'agit dans la Quadrature du cercle, que nous avons jugé à propos de l'expliquer avant que d'aller plus loin. Nous avons eu auſſi en vûe cette claſſe de Lecteurs, à qui la multitude des livres, ou le tems que leur enlevent

leurs occupations, ne permet gueres d'aller au-delà d'une préface, & qui desirent néanmoins d'acquerir quelque connoissance en tout genre. On a tâché de rendre celle-ci instructive pour eux ; ce qu'on va dire servira à leur faire concevoir distinctement la nature du problême, & à les mettre en état d'apprécier avec justesse de raisons ceux qui en annoncent la solution.

L'objet principal & primitif de la Géométrie, est de mesurer les différentes especes d'étendues que l'esprit considere ; mais mesurer n'est autre chose que comparer une certaine étendue à une autre plus simple, & dont on a une idée plus claire & plus distincte. Partant de ce principe, les Géometres ont pris la ligne droite pour la mesure à laquelle ils rapporteroient toutes les longueurs ; le quarré pour celle à laquelle ils

rappelleroient les ſurfaces quelconques ; le cube enfin pour celle des ſolides. Ainſi rectifier une courbe, quarrer une ſurface, cuber un ſolide, ne ſont autre choſe que déterminer leur grandeur, les meſurer. Quarrer un cercle, n'eſt donc pas, comme l'imagine un vulgaire ignorant, faire un cercle quarré, ce qui eſt abſurde ; ou comme ſemblent le croire certaines gens, faire un quarré d'un cercle ; mais meſurer le cercle, le comparer à une figure rectiligne, comme au quarré de ſon diametre, & connoître ſon rapport précis avec ce quarré ; ou enfin, parce que l'un dépend de l'autre, déterminer le rapport de la circonférence avec le diametre. Lorſqu'on dit un rapport précis, on entend parler de cette exactitude qui eſt la vérité même, de cette exactitude avec laquelle le triangle eſt la moitié d'un parallelogramme de même

base & même hauteur, & une parabole ses deux tiers. Quant aux mesures qui ne s'écartent que de très-peu de la vérité, quelque insensible que soit cet écart, elles satisfont, il est vrai, à la pratique, parce que celle-ci ne peut jamais donner que des à-peu-près; mais l'esprit géométrique ressent toujours une sorte de peine d'y être réduit, & il s'efforce de la secouer jusqu'à ce qu'il y soit parvenu, ou qu'il ait démontré l'impossibilité de le faire. On chercha sans doute long-tems le rapport numérique de la diagonale du quarré avec son côté, & quelques ignorans le cherchent encore, ou poussent l'imbécillité jusqu'à l'assigner. Les vrais Géometres ont cessé leurs poursuites depuis qu'ils sont en état de démontrer que cela est impossible. Il est fort probable que la Quadrature du cercle doit être mise dans une classe semblable;

il y a déja plusieurs siécles que les habiles Géometres l'ont abandonnée, comme un sujet qui n'est propre qu'à les épuiser en efforts inutiles; ils se sont bornés à perfectionner de plus en plus les moyens d'en approcher. En effet, au défaut d'une exactitude parfaite, ce qu'ils pouvoient lui substituer de mieux, étoit un à-peu-près indéfiniment voisin. A cet égard, la Géométrie semble n'avoir rien à desirer. *Archimede* démontroit autrefois que la circonférence étoit plus grande que le triple & les $\frac{10}{71}$ du diametre, & moindre que le triple & les $\frac{10}{70}$ ou la septiéme du même diametre. La différence de ces deux termes n'est qu'une 497e : ainsi il est évident qu'elle n'est qu'environ la 1500e de la circonférence, & qu'en supposant, ce qui approche de la vérité, que cette circonférence est voisine du milieu, entre les deux polygones,

l'erreur ſera à peine d'une 3000e.

Mais les Modernes, peu ſatisfaits de cette approximation, quoique commode dans la pratique & dans certains cas, l'ont conſidérablement perfectionnée. On ſçait aujourd'hui que le diametre étant 1. 00000, la circonférence eſt plus grande que 3. 14159, & moindre que 3.14160. Deſire-t-on une exactitude plus grande ? on fait voir, que ſuppoſant ce diametre de 1. 00000, 00000, la circonférence ſurpaſſe 3. 14159, 26535, & qu'elle eſt ſurpaſſée par 3.14159, 26536. L'erreur eſt déja ici moindre qu'une 1. 00000, 00000e. du diametre; elle eſt cependant encore énorme & groſſiere, en comparaiſon de celle que le Géometre peut prévenir; l'imagination ſe refuſe à en concevoir la petiteſſe, je dirois preſque infinie. Si l'on employe le rapport donné par M. de *Lagni*, cette

erreur ſera une moindre partie du diametre, que l'unité d'un nombre composé de cent-vingt-ſix chiffres. En ſuppoſant les étoiles fixes ſi éloignées du ſoleil que la parallaxe de l'orbite terreſtre ne ſoit que d'une ſeconde, c'eſt-à-dire ſuppoſant un cercle dont le rayon fût au moins de 425000000 diametres de la terre, on ne ſe tromperoit pas de l'épaiſſeur d'un cheveu, ſur cette immenſe circonférence. Mais que dis je? Le rapport donné par *Ludolph Van Ceulen*, rapport composé ſeulement de 35 chiffres, eſt déja plus que ſuffiſant pour prévenir cette erreur: néanmoins quelle diſproportion de l'exactitude de l'un avec celle de l'autre! les plus communes notions de l'arithmétique ſuffiſent pour en donner une idée.

Si l'hiſtoire des efforts que le problême de la Quadrature du cercle a occaſionnés, n'étoit que

celle des pygmées en Géométrie, qui l'ont entrepris, elle mériteroit bien peu la curioſité des Lecteurs. Mais les tentatives des Géometres anciens & modernes, pour qui cette recherche a été quelquefois le motif d'autres découvertes très-intéreſſantes, ou qui deſeſpérant d'atteindre préciſément au but, ſe ſont bornés à en approcher de plus en plus, à l'aide de certaines méthodes fort ingénieuſes; ces tentatives, dis-je, nous préſentent des traits dignes d'attention : ce ſont proprement les ſeuls dont il ſera queſtion ici. Le tems m'eſt trop précieux pour avoir donné un ſeul inſtant à déterrer quelque ridicule auteur de Quadrature : ſi j'ai parlé de quelques-uns d'eux dans un chapitre à part, c'eſt uniquement de ceux qui ſe ſont préſentés à moi dans le cours d'autres recherches.

Quelque peu dignes que ſoient

ces hommes ſinguliers d'occuper le loiſir d'un Ecrivain judicieux, je ne puis réſiſter à l'envie d'en tracer un portrait, qui ſera avoué de tous ceux qui ont eu occaſion de traiter avec eux.

Trois ſortes de perſonnes travaillent à quarrer le cercle avec une pleine confiance en leurs ſuccès. Je comprends dans la premiere claſſe, ces gens qui ſans avoir la moindre connoiſſance de la Géométrie, ni des moyens qu'elle employe dans ſes recherches, s'engagent dans celle de la Quadrature, ſans ſçavoir preſque en quoi conſiſte l'état de la queſtion. On les voit propoſer avec une aſſurance qui excite la pitié, de groſſiers méchaniſmes, incapables même, quand on les admettroit, de conduire à des à-peu-près de quelqu'exactitude. Celui-ci entoure le cercle d'un fil délié, & penſe avoir par ce moyen la cir-

conférence avec la derniere précision. Il y en a qui après cette belle opération, partagent ce fil en quatre parties égales, pour faire d'une d'elles le côté d'un quarré qu'ils prétendent égal au cercle. Ils ignorent cette vérité, que la Géométrie démontroit presque encore au berceau ; sçavoir, que de toutes les figures d'égal contour, le cercle est celle qui renferme le plus d'étendue. On en trouvera qui proposeront de faire rouler un cercle sur un plan bien uni, ou d'en peser un, formé d'une matiere bien égale & uniformément épaisse, contre un quarré de même matiere ; & j'ai vû souvent de ces gens, dont toute la Géométrie consistoit à mener méchaniquement une perpendiculaire ou une parallele, faire après bien des mysteres, l'ouverture de quelqu'un de ces ridicules moyens de quarrer le cercle, & insulter ensuite par

un ſouris moqueur, aux Géometres qui n'avoient pas ſçu les imaginer.

Il y a d'autres chercheurs de Quadrature qui, un peu plus inſtruits dans la Géométrie, ſemblent ne s'en ſervir que pour s'égarer dans un labyrinthe de paralogiſmes. Les premiers dont j'ai parlé, gens du moins peu incommodes, ſe contentent avec une eſpece de ſatisfaction philoſophique, d'être en poſſeſſion du ſecret; mais ceux de la ſeconde claſſe ne manquent gueres de fatiguer les Géometres, & ſur-tout les Académies, par leur importunité à ſolliciter l'examen & le jugement de leur prétendue découverte; ils la portent de tribunal en tribunal, c'eſt-à-dire d'Académie en Académie; de celles de la province, car elles ont ſouvent des quadratures à examiner en premier reſſort, à celle de la

capitale. Ils ſe plaignent avec amertume, d'une eſpece de déni de juſtice quand on refuſe de les écouter, & ils manquent rarement de récuſer leurs juges, ou de les prendre à partie s'ils en ſont condamnés. Vainement viendra-t-on quelquefois à bout de leur montrer la foibleſſe de leurs raiſonnemens, bientôt l'édifice eſt réparé; bientôt engagé dans un dédale auſſi tortueux que le premier, notre pauvre Quadrateur vient de nouveau harceler ſon juge : heureux celui-ci, quand il peut promptement l'obliger à le récuſer & à le citer devant le public, en lui dévoilant ſa découverte. Une eſpece de fatalité ſemble avoir ordonné que tous ceux qui ſe perſuadent une fois d'être en poſſeſſion de la Quadrature du cercle, vivront & mourront dans cette perſuaſion intime. C'eſt une manie qui, pire que celle du Héros

de la Manche, ne les quitte pas même dans leurs derniers momens; il n'en est aucun qui manque d'en appeller au jugement d'une postérité plus équitable, à moins que de mauvaise humeur contre leur siécle, ils n'aiment mieux s'en venger en cachant leur secret. » Ingrats contemporains, siécle barbare, s'écrioit un d'eux dans » ces derniers instans, je voulois » vous enseigner la plus belle dé- » couverte qui ait jamais été faite, » je voulois vous desabuser des » erreurs grossieres dont vous por- » tez le joug; vous m'avez rebuté, » hé bien, je sortirai de ce monde » sans l'éclairer ». Effectivement il mourut sans faire part de son précieux secret, & les Géometres n'ont pas eu la complaisance de le regretter.

Il y a une troisiéme espece de Quadrateurs, plus singuliers encore, mais moins incommodes,

en ce que leur maniere de penſer a bientôt terminé l'examen de leur découverte. Ce ſont ces eſprits d'une trempe, ce me ſemble, inconnue aux ſiécles paſſés, qui ſçavent ſe jouer des principes les plus évidens de la Géométrie, qui ont le courage de heurter de front les axiômes du ſens commun. M. *Liger*, je ne le nomme que parce qu'il s'eſt nommé ſi ſouvent dans les Mercures & ailleurs, M. *Liger* vous dira avec une grande aſſurance, que le tout n'eſt pas plus grand que la partie, que la racine quarrée de 288 eſt exactement la même que celle de 289, que 50 a la même racine que 49, &c. Il fera plus, il entreprendra de vous le prouver par un méchaniſme à peine capable d'en impoſer à l'artiſan groſſier qui le pratique. Il établit enfin une Géométrie toute nouvelle ſur les débris de l'ancienne. Prétendre dé-

ſabuſer des eſprits de cette eſpece, c'eſt vouloir perdre ſon tems; quand on eſt venu à un pareil excès de rêverie, on a perdu le droit d'être frappé de l'évidence.

J'ai ſouvent remarqué avec ſurpriſe, combien peu ceux qui ſe livrent à rechercher la Quadrature du cercle, ou qui croyent la poſſeder, ſont inſtruits de ce que les Géometres ont trouvé ſur ce ſujet; à peine connoiſſent-ils les plus ſimples approximations; & à coup ſur, la maniere dont on y eſt parvenu leur eſt abſolument inconnue; car il eſt métaphyſiquement impoſſible que les connoiſſant on ſe faſſe illuſion: auſſi leur ignorance à cet égard eſt extrême; j'en appelle au témoignage intérieur des Quadrateurs, ſans doute en grand nombre, qui liront ceci.

Cette remarque m'a porté à croire, qu'un moyen peut-être

efficace de diminuer le nombre de ceux qui s'adonnent à cette recherche, étoit de rassembler sous un même point de vûe les découvertes réelles de la Géométrie sur ce problême fameux. Il est en effet à présumer que si les vérités qu'on a exposées plus haut, & plusieurs autres qu'on développe dans le cours de cet Ouvrage, étoient plus universellement connues, on verroit moins de ces malheureuses victimes d'une entreprise mal réfléchie. A la vérité j'espere peu de ceux qui ont déja résolu le problême ; la plûpart sont dans la disposition prochaine de nier les vérités les mieux établies, dès que la contradiction les y conduira. Le coup est porté, & l'on peut leur appliquer ce vers d'*Horace*,

Et tribus Anticiris caput insanabile ...

Mais je ne doute point que cette histoire ne soit propre à préserver

du même travers ceux qui n'ont point encore l'esprit préoccupé. Elle pourra aussi servir à rendre le repos à quelques personnes de bonne foi, qui privées des moyens de s'informer de ce qu'on a déja fait, s'épuisent en efforts inutiles. Les gens sensés à qui la Géométrie est peu connue, pourront prendre ici une connoissance exacte de la question, & porter un jugement sain & équitable sur les prétentions de ceux dont la vaine confiance pourroit peut-être leur en imposer. Pour écarter enfin cette foule de Quadrateurs qui obsédent les Académies, ne pourroit-on pas les obliger à s'instruire ici, comme par un préliminaire, des vérités reçues de l'aveu unanime des Géometres, sur la grandeur du cercle? Les réduisant par ce moyen, ou à les contester ou à les admetre, ils seront dans le premier cas indignes d'être écoutés,

& dans le ſecond, la conviction intime de leur erreur ſera peut-être bien prochaine : je dis peut-être, car je n'oſerois l'aſſurer; l'ignorant, de même que l'homme de mauvaiſe foi, ſçait ſe ménager mille reſſources que tout autre n'auroit jamais imaginées.

J'ai enfin penſé que cette ſuite de découvertes ſur la meſure du cercle, raſſemblées ſous le même point de vûe, pouvoit former un ſpectacle propre à flatter la curioſité des Géometres. Pluſieurs d'entr'elles méritent l'attention des plus habiles, comme tenant de près au développement & à la perfection que la Géométrie a reçue dans le dernier ſiécle. C'eſt ce que l'on verra clairement dans le chapitre quatriéme, où j'expoſe les inventions ſucceſſives de *Wallis*, *Brouncker*, *Newton*; inventions toutes liées enſemble, & aboutiſſantes au calcul intégral & à

plusieurs autres méthodes analytiques de grande importance.

L'utilité qui paroît devoir résulter d'un ouvrage de cette nature, & l'agrément qu'il présente pour ceux qui sont un peu curieux de connoître les pas de l'esprit humain, avoient ce semble frappé avant moi un Analyste habile (M. *de Lagni*) : le *commercium philosoph.* (*a*) entre *Leibnitz* & *Bernoulli*, nous apprend qu'il l'avoit projetté. Ce Géometre, le fleau des Quadrateurs de son tems, étoit en état de remplir parfaitement cet objet, & j'ai été surpris de voir que M. *Leibnitz*, dans le même recueil de Lettres, semble se défier de sa capacité, & craindre qu'il ne donnât qu'un ouvrage imparfait, à moins qu'il ne le lui communiquât ou à M. *Bernoulli*. J'ai recherché quelle pouvoit être la cause d'une défiance si mal

(*a*) P. 300, 302. II. vol.

fondée, & je pense l'avoir trouvée. *Leibnitz* craignoit apparemment que M. *de Lagni* n'ajoutât trop de foi à ce qu'il appelloit les calomnies des Anglois, au sujet de ses découvertes dans les nouveaux calculs, dont l'une est la Quadrature du cercle, exprimée par une suite infinie de nombres; découverte dont il fut pendant longtems fort jaloux, & que les Anglois l'ont accusé d'avoir empruntée de *Gregori*. D'un autre côté, M. *de Lagni* quoique connoissant les calculs de l'infini, fut toujours un de ceux qui négligerent avec affectation d'en faire usage; & peut-être à cet égard étoit-il à craindre en effet qu'il ne leur rendît pas toute la justice qui leur étoit dûe. Je saisis cette occasion de justifier un autre Académicien encore vivant, qu'on voit traité dans le même endroit avec autant d'injustice. Celui-ci

méritoit

méritoit encore moins d'être enveloppé dans ce jugement précipité; il n'avoit aucun fondement, si ce n'est que l'un & l'autre de ces Académiciens n'étoient point connus de *Leibnitz*. Mais comment le dernier l'auroit-il été, puisqu'il ne faisoit alors que d'entrer dans la carriere de la Géométrie ? Les sçavans Mémoires qu'il a donnés bientôt après dans les recueils de l'Académie, & qui prouvent qu'il étoit dès lors également versé dans l'une & l'autre analyse, auroient non seulement calmé les craintes de *Leibnitz*, mais lui auroient attiré son estime.

Je n'ai rien dit dans le cours de cet Ouvrage, de l'Auteur de l'étrange *Prospectus* & de quelques autres pieces de la même nature, qui nous annoncerent l'été passé la Quadrature du cercle. Par égard pour son nom & ses autres qualités qui le rendent estimable à ceux

qui le connoiſſent, en même tems qu'ils le plaignent de ſa maniere de penſer, qui n'a peut-être jamais eu d'exemple, je voulois me taire ſur la ſingularité de ſes prétentions, malgré le bruit qu'elles faiſoient dans le monde. J'eſpérois que quelques amis ou verſés, ou du moins plus inſtruits dans la Géométrie, le remettroient ſur la voie de la vérité; mais la publication de ſa prétendue Quadrature dans un petit *in*-4°. magnifiquement orné de cartouches, vient de m'apprendre qu'apparemment on y a travaillé ſans ſuccès, & j'ai crû ne pouvoir me diſpenſer d'en porter le jugement qu'elle mérite. Les ſiécles à venir croiroient-ils, ſi ce monument ne le leur atteſtoit, qu'on ait pû avancer des propoſitions auſſi abſurdes, auſſi directement contraires à la ſaine raiſon, que celles ſur leſquelles cet Auteur appuye ſa prétendue découverte,

& qu'il ſubſtitue aux axiômes juſqu'ici reçus de l'aveu de tous les hommes? Deux figures ne ſont plus égales quand elles ſe touchent dans tous leurs points, dans toute leur étendue ; il ſuffit, ſuivant M. *de Cauſans* qu'elles ſe touchent dans quelques points, c'eſt-à-dire dans ceux où elles peuvent ſe toucher. De là ſuit auſſi ce nouveau principe, digne rejetton d'un axiôme de cette eſpece, que la partie eſt égale au tout; que dis-je, que dans chaque tout on peut aſſigner pluſieurs parties qui lui ſont égales. Auſſi le quarré eſt, dit-il, préciſément égal au cercle qu'il renferme, & même celui-ci à une autre figure dont les angles ſaillants s'appuyent ſeulement ſur ſa circonférence. L'Auteur enfin détermine la figure de la terre, les longitudes, la déclinaiſon de l'aiguille aimantée, ſur des raiſons qui n'en ſeroient ni plus ni moins valables,

quand la terre ſeroit de forme cubique ou pyramidale. Je me couvrirois de ridicule auprès des Lecteurs ſenſés, ſi j'entreprenois d'oppoſer les moindres raiſonnemens à ces prétentions. Il n'eſt perſonne, faiſant uſage de ſa raiſon, qui ne ſoit perſuadé que les vérités métaphyſiques conteſtées par M. *de C.* ſont plus certaines qu'il ne l'eſt que jamais ſon *Proſpectus* ſingulier ait vû le jour, qu'il y ait eu des ſouſcriptions ouvertes pour parier contre lui, & qu'il ait publié ſa Quadrature. Pour tout autre enfin que lui-même, elles ſont plus inconteſtables que ſon exiſtence propre.

Au reſte il eſt bien facile de reconnoître la cauſe de l'erreur de M. *de C.* elle a ſa ſource dans la mépriſe où il donne ſur la ſimple définition de l'angle & ſur ce qui le conſtitue. La ſurface renfermée entre ſes côtés, la longueur de

ces côtés n'entrent pour rien dans la grandeur d'un angle, & cette grandeur ne sert à rien pour déterminer la surface qu'il renferme avec une troisiéme ligne qui le borne. M. *de C.* suppose néanmoins le contraire, & en fait le fondement de sa Quadrature. C'est en sçavoir encore trop peu en Géométrie, pour prétendre redresser les idées des Géometres.



AVIS AU LECTEUR.

Quelques affaires pressantes & qui obligeoient l'Auteur à des absences fréquentes de la Ville, ne lui ayant permis que de jetter un coup d'œil sur les premieres feuilles à mesure qu'elles s'imprimoient, afin de ne point faire languir l'impression, on prie le Lecteur de corriger d'après l'errata les fautes qu'on y releve, & de suppléer à celles qui auroient échappé à la révision qu'on a faite de l'ouvrage entier. On se flate qu'il n'en est aucune qui concerne le fond du sujet.



TABLE DES MATIERES.

SOMMAIRE DES CHAPITRES.

CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE II.

quadrature qu'on lui attribue & son apologie. VI. *Sur les Géometres* Bryson & Antiphon. *Erreur grossiere du premier. Justification du dernier.* VII. *Mesure approchée du cercle, donnée par* Archimede. VIII. *Exposition de ses principes.* IX. *Réponse à une objection faite contre son calcul. Adresse d'*Archimede *pour la prévenir. Nouvelle finesse de ce Géometre dans le choix de ses nombres.* X. *Autres approximateurs anciens.* XI. *Réflexion sur la propriété de la tangente de la spirale.* XII. *Raisonnement qui fait voir qu'on ne doit rien en attendre non plus que des diverses courbes de la même nature.*

CHAPITRE III.

I. Regiomontanus *réfute les Quadratures prétendues du Cardinal de* Cusa, *& trouve une mesure du cercle un peu plus rapprochée que celle d'*Archimede. II. Pierre Metius *donne son approximation célebre. Son avantage.* III *M.* Viete

exprime le cercle par une ſuite infinie de termes, & calcule une approximation en onze décimales. IV. Adrianus Romanus *la pouſſe à dix-ſept, &* Ludolph *à trente-cinq.* V. *Idée du travail immenſe de* Lud. VI. Snellius *trouve des moyens pour approcher à moins de frais de la meſure du cercle. Ses propoſitions fondamentales. Facilité qui en réſulte pour déterminer des limites très-rapprochées du cercle. Il vérifie la proportion de* Ludolph. *Expreſſion qu'il donne pour les cordes des arcs continuellement ſoudoubles. Grandeurs des polygones inſcrits & circonſcrits qu'il en tire. Leur uſage pour vérifier les quadratures prétendues.* VII. *Addition que fait M.* Huygens *aux découvertes de* Snellius. *Diverſes opérations géométriques qu'il propoſe pour trouver la grandeur approchée des arcs ou des eſpaces circulaires. Note qui en contient quelques autres.* VIII. *Idée d'un ouvrage particulier de M.* Huygens, *qui a quelque trait à la Quadrature du cercle.* IX. *Hiſtoire des*

efforts de Gregoire de S. Vincent *pour y parvenir. Exposition de sa Quadrature. Contestation qu'elle occasionne. Elle est réfutée par* Descartes, Huygens *& le Pere* Leotaud. X. *Autre querelle élevée entre* Gregori *& M.* Huygens, *sur une démonstration que donnoit le premier, de l'impossibilité de la Quadrature du cercle. Raison de* Gregori. *Ses propositions sur les limites des secteurs circulaires, elliptiques & hyperboliques.* XI. *Raisons de pencher pour l'impossibilité de la Quadrature définie du cercle. Démonstration de celle de l'indéfinie. Addition faite à ce chapitre, où l'on se détermine à regarder la Quadrature, même définie, comme impossible.* Voyez à la fin de l'ouvrage.

CHAPITRE IV.

I. *Idée générale de ce chapitre.* II. *Objet de l'arithmétique de l'infini. Découvertes de* Wallis *& jusques où il les pousse.* III. *Il est arrêté à la mesure du cercle & imagine*

ses interpolations. Idée & exemple de cette méthode. IV. *Il exprime la grandeur du cercle par une suite infinie de nombres.* V. *Il regarde la Quadrature définie comme impossible, & sur quel fondement. Nouveaux motifs de se le persuader.* VI. *Autre expression de la grandeur du cercle, donnée par Mylord* Brounker, *en fraction d'une forme particuliere.* VII. *Usage qu'a fait dans la suite M.* Euler *des fractions de cette espece.* VIII. *Développement de la maniere dont* Newton, *travaillant d'après les idées de* Wallis, *trouve la premiere suite générale pour le cercle.* IX. *Autres moyens qui se présentent ensuite à lui.* X. *Il les communique à* Barrow, Collins, *de même que presque tout le calcul moderne, les quadratures & rectifications des courbes, la méthode des suites, &c. Diverses expressions qu'il donne des arcs & des segmens circulaires.* XI. *M.* Jacques Gregori *devine le principe de* Newton, *& ajoute à ses découvertes. Suite qu'il avoit trouvée précédem-*

ment pour le cercle. Il donne celle de l'arc par la tangente & plusieurs autres. Eloge de ce Géometre. Justice que lui rend Newton. XII. *M.* Leibnitz *trouve de son côté la même suite. On le défend contre l'accusation de plagiat que lui ont intenté quelques Anglois.* XIII. *La même suite trouvée par M.* de Lagni. *Autre motif d'apologie pour M.* Leibnitz. XIV. *Diverses expressions particulieres de la grandeur du cercle ou de ses parties.* XV. *Utilité évidente de ces suites quand elles convergent sensiblement.* XVI. *Maniere de les employer commodément pour en tirer des approximations en grands nombres. Exemple de cette méthode.* XVII. *Avantages de la suite par la tangente, & la maniere de s'en servir.* XVIII. *Emploi qu'en ont fait quelques Géometres modernes, comme MM.* Sharp, Machin, de Lagni. *Approximation en soixante-quinze chiffres donnée par ce premier, poussée à cent par le second, & à cent vingt-sept par le dernier.* XIX. *Défauts qu'ont les suites assez*

souvent, & en particulier celle de l'arc par la tangente. XX. *Moyen par lequel M.* Euler *remédie à celui de l'irrationalité.* XXI. *Maniere dont il obvie au peu de convergence de la suite qui exprime l'arc de 45°. par la tangente avec un exemple. Celle de M.* Simpson *aussi éclaircie par un exemple.* XXII. *Utilité des suites pour en tirer dans la pratique des expressions d'un calcul simple & cependant assez exact. Exemples qu'on en donne d'après* Newton, Leibnitz, *&c. Moyen de l'auteur pour trouver par approximation la somme d'une suite.* XXIII. *Exposition de la méthode de quarrer les courbes par la connoissance d'un petit nombre d'ordonnées équidistantes, & son application au cercle. Essai de commentaire sur la méthode différentielle de* Newton. XXIV. *Autre méthode donnée par M.* Simpson, *appliquée au cercle.* XXV. *Précis d'un écrit de M.* Jean Bernoulli *sur la mesure du cercle.*

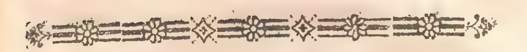
CHAPITRE V.

I. *Motifs qui nous ont déterminé à parler de quelques-uns de ceux qui se sont singularisés par leurs erreurs sur la Quadrature du cercle.* II. *Histoire de quelques Quadrateurs anciens.* III. *Les siécles d'ignorance fournissent grand nombre de Géométres de cette espece, qu'on ne s'est pas mis en peine de tirer de l'obscurité.* IV. *Le Cardinal de* Cusa *réfuté par* Regiomontanus. V. Simon Duchesne *donne occasion à* Metius *de trouver son rapport célebre.* VI. Oronce Finée *annonce la Quadrature du cercle, la duplication du cube, la trisection de l'angle, &c. Il est réfuté par* Buteon, Nonius. *En quoi consistoit son erreur.* VII. Joseph Scaliger *se met sur les rangs, & traite* Archimede *& les Géometres avec hauteur.* Viete, Adrianus Romanus *&* Clavius *le réfutent; ce dernier sur-tout le tourne en ridicule, & s'en attire de grosses injures.* VIII. *Quelques Quadrateurs des plus célebres, tirés*

CHAPITRE VI.

ques. Expositions de ses solutions & remarque à leur sujet. VI. Eudoxe *le résout par des courbes particulieres qu'il imagine à ce sujet, mais qui ne nous sont pas parvenues.* VII. *Idée de la solution d'*Eratostenes. VIII. *Solutions d'*Appollonius, Philon *&* Heron. IX. *Celle de* Nicomede *par la conchoïde, approuvée par* Newton, *& regardée comme préférable à celles qui employent les sections coniques.* X. *Maniere dont* Pappus *résout le problême; ce qui donne lieu à l'invention de la cyssoïde de* Diocles. *Celle de* Sporus *peu différente de celle de* Pappus *&* Diocles. XI. *Sur la trisection de l'angle; problêmes auxquels on voit d'abord qu'elle se réduit. Premieres manieres dont les Anciens le résolurent par l'hyperbole & la conchoïde.* XII. *Autre maniere dont les Anciens appliquerent l'hyperbole à cette question.* XIII. *Sur la quadratrice, la spirale & autres courbes semblables.* XIV. *Indication générale de diverses solutions que les Géometres moder-*

Fin de la Table des Sommaires.



APPROBATION, du Censeur Royal.

J'AI lû par ordre de Monseigneur le Chancelier, un Manuscrit qui a pour titre, *Histoire de la Quadrature du cercle*. Cet ouvrage annonce dans son Auteur une vaste érudition & de profondes connoissances en Géométrie. Il m'a donc paru qu'il étoit tout-à-fait digne de l'estime des connoisseurs en ces matieres. A Paris, ce premier Mai 1754.

LA CHAPELLE, *Membre de l'Académie des Sciences de Lyon, & de la Société royale de Londres.*

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre, à nos amés & féaux Conseillers, les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Notre amé CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Imprimeur-Libraire à Paris, Adjoint de sa Communauté, nous a fait exposer qu'il desireroit faire imprimer & donner au public des Ouvrages qui ont pour titre : *Histoire des recherches sur la Quadrature du cercle*, par M. de M. *Histoire des Mathématiques*, par le même; *l'Art de la Guerre pratique*, par M. de Saint-Geniés; *Histoire de l'Astronomie*, par M. Esteve; *Petit Dictionnaire portatif de l'Ingénieur*, par M. Belidor; *Elémens d'analyse pratique*, traduits de l'Anglois de M. Simpson; s'il nous plaisoit lui accorder nos Lettres de privilége pour ce nécessaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter ledit Exposant, nous lui avons permis & permettons par ces présentes, de faire imprimer lesdits Ouvrages autant de fois que bon lui semblera, & de les vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le tems de *neuf années* consécutives, à compter du jour de la date desdites présentes. Faisons défenses à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu

de notre obéissance ; comme aussi à tous Libraires, Imprimeurs & autres d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire lesdits Ouvrages, ni d'en faire aucuns extraits, sous quelque prétexte que ce soit, d'augmentation, correction, changemens ou autres, sans la permission expresse & par écrit dudit exposant ou de ceux qui auront droit de lui ; à peine de confiscation des exemplaires contrefaits, de six mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit exposant, & de tous dépens, dommages & intérêts : à la charge que ces présentes seront enregistrées tout au long sur le registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles ; que l'impression desdits Ouvrages sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, suivant la feuille imprimée & attachée pour modéle sous le contrescel des présentes ; que l'impétrant se conformera en tout aux réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725 ; & qu'avant de les exposer en vente les manuscrits ou imprimés qui auront servi de copie à l'impression desdits Ouvrages, seront remis dans le même état où l'approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier Chancelier de France, le Sieur de Lamoignon, & qu'il en sera ensuite remis deux exemplaires de chacun dans notre Bibliothéque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier Chancelier de France, le

Sieur de Lamoignon, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le Sieur de Machault, Commandeur de nos Ordres; le tout à peine de nullité des présentes: du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit exposant ou ses ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie desdites présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenue pour duement signifiée, & qu'aux copies, collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers-Secrétaires, foi soit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de haro, Charte normande & Lettres à ce contraires; car tel est notre plaisir. Donné à Fontainebleau le vingt-huitiéme jour du mois d'Octobre l'an de grace mil sept cens cinquante quatre, & de notre regne le quarantiéme. Par le Roi en son Conseil.

PERRIN.

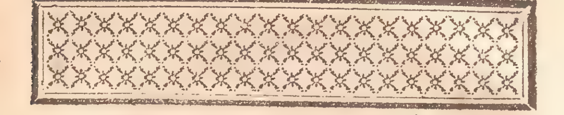
Registré sur le Registre treize de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 429. fol. 334. conformément aux anciens Réglemens, confirmés par l'Edit du 28 Février 1723. A Paris le 5 Novembre 1754.

DIDOT, *Syndic.*

ERRATA.

PAge 20, *ligne* 19, fig. 1. *lisez* fig. 2. *Pag.* 23, *lig.* 7, fig. 2, *lis.* fig. 3. *Pag.* 32, *lig.* 14, ils, *lis.* elles. *Pag.* 34, *lig.* 21, apperçu, *lis.* apperçue. *Pag.* 39, *lig.* 23, jamais, *lis.* jamais rien. *Pag.* 45, *lig.* 21, fut, *lis.* fut bientôt. *Pag.* 46, *lig.* 17, *ajoutez* V. *Pag.* 59, *lig.* 8, encore davantage, *lis.* beaucoup plus. *Pag.* 60, *lig.* 18, ils, *lis.* elles. *Pag.* 66, *lig.* 15, VIII. *lis.* IX. *Pag.* 77, *lig.* 10, proportion, *lis.* propofition. *Pag.* 78, *lig.* 14, folidité, *lis.* justesse. *Ibid. lig* 16, *cyclometris*, *lis. cyclometriæ*. *Pag.* 83, *lig.* 4, rejetté, *lis.* rejettée. *Pag.* 86, *lig.* 19, VII, *lis* X. *Pag.* 92, *lig.* 5, appliqué, *lis.* appliquée. *Pag.* 100, *lig.* 7, X, *lis.* XI. *Pag.* 101, *lig.* 18, n'étoit, *lis.* n'est. *Pag.* 108, *lig.* 15, étant a, on, *lis.* étant *a*. On. *Pag.* 109, *lig.* 22, foient donc, *lis.* foient. *Pag.* 113, *lig.* 14, ferrés, *lis.* ferrées. *Pag.* 116, *lig.* 2, designé, *lis.* designée. *Ibid. lig.* 8, déterminoit, *lis.* déterminoient. *Pag.* 121, *lig.* 10, trouve, *lis.* trouvera. *Pag.* 125, *lig.* 5, on a donc, *lis.* elles font. *Pag.* 126, *lig.* 9, plus, *lis.* plus à déterminer. *Pag.* 139, *lig.* 15, des, *lis.* les. *Pag.* 144, *lig.* 7, fort probable, *lis.* vraisemblable. *Ibid. lig.* 22, n'avoit, *lis.* n'a. *Pag.* 186, *lig.* 2, DE, *ajoutez* (fig. 22.) *Pag.* 198, *lig.* 22, AE *ea*, *ajoutez* (fig. 24.) *Pag.* 235, *lig.* 16, ce qui est impossible, *lis.* qu'on ne fçauroit trouver. *Pag.* 246, *lig.* 20, *ajoutez* fig. 27.

HISTOIRE



HISTOIRE
DE
LA QUADRATURE DU CERCLE.

CHAPITRE I.

En quoi consiste la quadrature du Cercle : diverses manieres de la considérer : quel degré d'utilité on doit lui assigner.

I. QUARRER le Cercle, ou, pour s'énoncer plus généralement, une figure quelconque, c'est assigner l'étendue précise qu'elle renferme : une raison fort naturelle a donné lieu à cette maniere de parler. Le quarré est, de tou-

tes les figures, la plus ſimple, la plus aiſée à meſurer, une ſeule de ſes dimenſions étant connue. Cela fit penſer aux Géometres qu'ils ne pouvoient donner une idée plus diſtincte de la grandeur d'une ſurface quelconque, qu'en déterminant le quarré qui l'égaleroit; de là meſurer une figure, quarrer une figure, devinrent & ſont encore des termes ſynonimes en Géométrie.

II. Il s'agit donc dans la quadrature du Cercle, de trouver l'étendue du cercle, comme dans la Géométrie élémentaire on trouve celle d'un triangle ou d'une figure rectiligne; je veux dire avec cette exactitude & cette préciſion qui ſont la vérité même. Cette comparaiſon me ſervira encore à faire ſentir quelle eſt la nature des voies que la Géométrie admet ſeules pour y parvenir. Il ſeroit ridicule de meſurer, le dirai-je, avec un compas, ou un fil, ou telle autre maniere méchanique qu'on voudra, la hauteur d'un triangle, lorſque ſes côtés

donnés, ou telles autres conditions du problême, suffisent pour déterminer cette hauteur; c'est au raisonnement seul à le faire. Il en doit être de même dans la question présente : il y a un rapport entre l'étendue du cercle & celle du quarré de son diametre, entre la longueur de ce diamettre & la circonférence, il y a, dis-je, un rapport déterminé & lié avec les propriétés du cercle; on ne doit donc employer pour parvenir à sa connoissance, que le raisonnement & le calcul fondés sur ces propriétés. Toute voie méchanique est interdite; l'esprit géométrique s'en indigne & le rejette, non par une fausse délicatesse, mais parce que quelque perfection qu'on lui supposât, aucune d'elles n'est capable de conduire à la même exactitude que le raisonnement. Je demande pardon aux Géometres d'entrer dans ce détail, mais je les prie en même tems de faire attention que quelque élémentaire qu'il soit, il n'est

encore que trop de perſonnes à qui il peut être utile, & qui, ſans cet avis, ſeroient capables de tenter ces moyens réprouvés par la Géométrie.

III. On appelle quadrature abſolue celle que je viens de décrire, & par laquelle on a exactement & préciſément la grandeur d'une figure. On quarre ainſi la parabole & pluſieurs autres figures curvilignes; on fait plus, on connoît auſſi avec cette exactitude l'étendue d'un grand nombre de ſegmens de ſurfaces courbes, ſoit ſphériques, cylindriques, coniques, &c. Je ne nomme ici que les plus connues. Mais il y en a un plus grand nombre encore que l'on déſeſpere de connoître jamais dans cette perfection. Et parmi celles qui réſiſtent ainſi à tous les efforts de la Géométrie, le cercle ſe préſente le premier.

IV. On s'étonnera, ſans doute, que ce qui eſt ſi facile dans les figures rectilignes, devienne tout-à-coup ſi difficile

dès le premier pas que l'on fait vers les figures courbes ; la ſurpriſe augmentera même en faiſant attention qu'un grand nombre de figures, en apparence moins ſimples que le cercle, ſont cependant ſuſceptibles de quadrature abſolue. Je vais tâcher d'en donner une raiſon : ne ſeroit-elle point que cette ſimplicité attribuée au cercle n'eſt qu'imaginaire, & nullement celle de la nature ? Sur quel motif, en effet, regardons-nous le cercle comme plus ſimple que les autres figures ? nous y ſommes déterminés par l'uniformité de ſon contour, par l'égalité conſtante des lignes tirées de ſon centre à la circonférence, égalité qui facilite beaucoup ſa deſcription. Mais ces avantages s'évanouiſſent aux yeux du Géometre qui analyſe les propriétés de cette figure ; il n'y voit qu'une eſpece particuliere d'ellipſe, dans laquelle l'égalité accidentelle de deux lignes a rendu égales toutes celles qui s'étendent de ſon centre à ſa cir-

conférence. Du reſte, cette égalité n'influe en rien ſur les rapports de ſes ordonnées aux abciſſes, ſur celui des polygones inſcrits & circonſcrits qui le limitent. Les courbes où ces rapports ſont plus ſimples, comme la parabole, quoique moins réguliere à nos yeux, ſont abſolument quarrables : le cercle où il eſt plus compliqué, ſera probablement toujours rebelle à la Géométrie.

V. Lorſque les courbes ne ſont pas ſuſceptibles de quadrature abſolue, les Géometres ſe bornent à ſubſtituer à la vérité un à peu près qui n'en differe qu'inſenſiblement. C'eſt là ce qu'on appelle quadrature approchée; expédient, il eſt vrai, toujours employé avec regret, mais néanmoins fort ſouvent néceſſaire; il a fallu y recourir pour le cercle, & peut-être la Géométrie y a plus gagné que ſi l'on eût bientôt trouvé ſa quadrature abſolue. L'impoſſibilité d'y parvenir a d'autant mieux fait éclater la ſagacité & l'eſprit de reſſource des habiles Géo-

metres; elle a été le motif d'une foule d'inventions qu'ils ont imaginées pour atteindre ou pour approcher du but. On en trouvera des exemples remarquables dans la suite de cette Histoire.

VI. La nature du cercle établit une telle liaison entre la mesure de son aire & la longueur de sa circonférence, que l'une étant connue, l'autre l'est aussi nécessairement. On aura donc également la solution du problême, soit qu'on détermine immédiatement quelque espace rectiligne égal au cercle, soit qu'on trouve une ligne égale à sa circonférence. Avant *Archimede*, inventeur de ce rapport, on tentoit le premier moyen; depuis lui jusqu'à la nouvelle Géométrie, les efforts des Géometres s'étoient principalement tournés vers la dimension de la circonférence: il est aujourd'hui libre de choisir l'une ou l'autre de ces deux voies; les nouveaux calculs s'y prêtent également. Mais, il faut bien le remarquer, cet

avantage eſt particulier au cercle ; c'eſt peut-être la ſeule figure courbe dont la rectification & la quadrature tiennent de ſi près l'une à l'autre.

VII. On ſçait encore que la détermination du centre de gravité d'un arc ou d'une portion quelconque de cercle, la tangente de la ſpirale & de pluſieurs autres courbes, la terminaiſon de la quadratrice, donneroient la quadrature du cercle ; mais tous ces problêmes en dépendent eux-mêmes, comme je le fais voir ailleurs, ſi intimement, que de quelque maniere qu'on les enviſage, c'eſt toujours elle qui ſe préſente la premiere. Ils ne ſçauroient jamais ſervir de moyens pour y parvenir.

VIII. Les Géometres diſtinguent deux manieres de quarrer les courbes, bien inégales en perfection ; ils nomment l'une définie, & l'autre indéfinie. En appliquant ceci à l'objet préſent, la quadrature définie du cercle ſeroit la meſure de ſon aire, ou entiere, ou ſeu-

lement de quelque ſegment déterminé ; comme *C D B P*, ou *A P B* (*fig.* 1.), les lignes *C P*, ou *P A*, ou *A E* ayant au rayon une certaine raiſon déterminée. Si quelque méthode donnoit en général la quadrature d'un ſegment quelconque, quelque fût le rapport de *C P*, ou *P A*, ou *A E*, avec le rayon, on auroit la quadrature indéfinie du cercle. Ce ſeroit peu faire, on oſe le dire, pour la Géométrie que de trouver la premiere : pour réſoudre le problême dans toute ſon étendue, il faudroit aſſigner la derniere, & il y a encore loin de l'une à l'autre. Car pour paſſer de la quadrature définie du cercle à celle de ſes parties quelconques, il reſteroit à réſoudre ce problême, plus difficile que le premier, *trouver la raiſon de deux arcs dont on connoîtroit les ſinus ou les tangentes, &c.* Pour le dire, en un mot, la quadrature indéfinie du cercle & de ſes parties, eſt autant au-deſſus de celle qui occupe infructueuſement les vulgaires

quadrateurs, que celle-ci eſt au-deſſus de la meſure des ſurfaces rectilignes.

IX. Il eſt à propos de diſcuter, avant d'aller plus loin, quel eſt le degré d'utilité de la quadrature du cercle, ſoit abſolue, ſoit approchée. Quant à la premiere, nous penſons, avec M. de *Maupertuis* *, que la Géométrie préſente aujourd'hui quantité de recherches plus intéreſſantes. La quadrature définie du cercle ne ſeroit preſque d'aucune utilité : les travaux des habiles Géometres, dont j'expoſerai bientôt les découvertes, ont fait connoître ſon rapport avec les figures rectilignes aſſez exactement pour n'avoir preſque rien à deſirer; & j'ai rendu ſenſible, par un exemple frappant, la prodigieuſe exactitude à laquelle il eſt aiſé d'atteindre. Il y auroit quelque avantage, j'en conviens, dans la quadrature indéfinie, ou autrement l'intégration abſolue de quelques-unes de ces formules, $dx\sqrt{aa-xx}$,

* Lettre ſur le progrès des Sciences.

ou $dx\sqrt{2ax - xx}$, ou $\frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$, ou, &c. Mais, je le remarque encore, c'eſt moins à cauſe du cercle que les analyſtes le déſireroient, que parce qu'on auroit par là la meſure abſolue d'une infinité d'autres courbes qui dépendent d'expreſſions de cette forme. Comme il eſt non ſeulement probable, mais bien démontré (*voyez la fin du chap.* 3), qu'on n'y parviendra jamais, on regarde comme réſolu tout problême qui conduit légitimement à la quadrature du cercle ou de l'hyperbole ; & il l'eſt en effet, même dans la pratique, puiſque l'on a des méthodes aſſez ſimples pour trouver, avec une exactitude preſque indéfinie, la grandeur d'un arc ou d'un ſegment circulaire quelconque. Que manque-t-il donc aux Arts, à la Géométrie même, dans l'abſence de la quadrature abſolue du cercle ? rien du tout. Une détermination probablement enveloppée dans des rapports très-com-

pliqués, ſeroit une ſtérile connoiſſance pour l'eſprit humain. On auroit plus d'obligation, je le dis avec confiance, à celui qui réduiroit la rectification de l'ellipſe & de l'hyperbole, aux quadratures de ces deux courbes.

X. Je ne remarque preſque qu'à regret, & comme un trait de ſimplicité, la croyance où ſont la plûpart des chercheurs de la quadrature du cercle, que les Souverains s'intéreſſant aux travaux des Géometres, ont promis une récompenſe conſiderable à celui qui y réuſſiroit. D'autres auſſi ſimples, ou même plus ſimples encore, ſe ſont imaginé que le problême des longitudes en dépendoit: ajoutons à ces prétentions celle que les plus grands Géometres ont recherché ou recherchent la quadrature du cercle, comme ſi ce problême étoit l'objet unique & le but de toute la Géométrie. Ce ſont là trois points ſur leſquels ces bonnes gens * ne manquent guere d'in-

* Voyez le Sieur Baſſelin, *dans ſa quadrat.*

fiſter beaucoup : il faut les en déſabuſer. Il n'y a aucune récompenſe promiſe ou à eſpérer pour celui qui quarrera le cercle. Il eſt ridicule de prétendre que les longitudes en dépendent. La raiſon de la circonférence au diametre n'entre pour rien dans aucun problême de navigation ; & ſi quelqu'un la ſuppoſoit, comme c'eſt un problême de pure pratique, il ſeroit plus que ſuffiſamment réſolu par quelqu'une des plus ſimples approximations du cercle : celle de *Metius*, par exemple, qui differe de la vérité de moins d'une 1, 000, 000e, & dont l'erreur ſur toute la circonférence de la terre ne va pas à 25 toiſes. Il y a auſſi peu de réalité dans les prétendues recherches des grands Géometres ſur la quadrature du cercle : nous en avons aſſez dit dans l'article précedent, pour faire connoître qu'ils ont eu des vûes plus générales en la recherchant. C'eſt en avoir d'exceſſivement bornées en Géométrie, que de n'y voir rien de plus inté-

ressant que cette question. Je reviens à mon sujet.

XI. Quant à la quadrature approchée du cercle & des figures courbes, il est évident à qui connoît l'objet de la Géométrie, qu'elle devient nécessaire dès qu'on suppose la mesure absolue impossible, ou encore inconnue. Mille problêmes, soit dans les mathématiques pures, soit dans les sciences phisico-mathématiques, ramenent sans cesse à cette mesure. Il n'en faut pas davantage pour justifier les Géometres de leurs peines à se procurer des approximations si peu différentes de la vérité, qu'elles puissent en tenir lieu dans tous les cas. S'ils ont quelquefois passé les bornes de cette nécessité, on le leur pardonnera quand on aura fait attention que c'est à cette curiosité, en apparence inutile, quoique souvent justifiée par les plus heureuses découvertes, que toutes les sciences doivent leur avancement.

CHAPITRE II.

Tentatives & travaux des Anciens pour la mesure du Cercle.

I. IL est dans l'ordre des progrès de l'esprit humain que la mesure du cercle se soit fait desirer bientôt après qu'on eut trouvé celle des figures rectilignes. Ces objets de la Géométrie naissante arrêterent peu les premiers qui la cultiverent, & à en juger par d'autres découvertes faites dès le tems de *Thalès* & de *Pythagore*, ou peu après eux, ils furent bientôt au-dessus de ces foibles objets de spéculation. On peut donc conjecturer que les premiers efforts pour mesurer le cercle ont une date presque aussi ancienne que la naissance de la Géométrie chez les Grecs.

II. On ne peut douter du moins que près d'un siécle & demi après cette époque, le problême ne commençât à

occuper les Géometres. *Plutarque* (*a*) nous en fournit une preuve, en nous apprenant que le Philoſophe *Anaxagore* (*b*) s'en occupa dans ſa priſon, qu'il y compoſa même un ouvrage à ſon ſujet. Nous ignorons au reſte entierement quelles furent ſes prétentions, s'il crut avoir réuſſi, ou s'il informoit ſeulement les Géometres des difficultés qui s'étoient préſentées à lui dans ſa recherche. Cette derniere opinion eſt plus probable, ſi nous faiſons attention aux éloges que lui donnoit *Platon* (*c*), ſur ſa grande habileté en Géométrie.

III. Quoiqu'il en ſoit, bientôt après cette tentative le problême de la quadraturedu cercle devint très-célébre. Il étoit dès le tems de *Socrate*, & ſortant des écoles des Philoſophes, il avoit déja

(*a*) Traité *de exilio.*

(*b*) *Anaxagore de Clazomène*, le 4e chef de la ſecte Ionienne, vivoit vers l'an 480 avant J. C. Il fut contemporain de *Periclès*, qui lui ſauva la vie, ayant été accuſé d'impiété, pour avoir penſé que les aſtres étoient matériels.

(*c*) Procluſ. *Com. in Eucl.* p. 38.

excité la curiosité du vulgaire. *Aristophane* en saisissoit l'occasion pour plaisanter dans sa Comédie des *Oiseaux* : *Je vais*, fait-il dire à un Géometre qu'il introduit sur la scene, *la regle & l'équerre en main, vous quarrer le cercle.* Le peuple d'Athènes avoit probablement le même penchant que le vulgaire d'aujourd'hui à donner à ces paroles un sens absurde, & le Poëte s'en prévaloit pour l'exciter à rire. La note d'un Scholiaste Grec, qui sur cet endroit remarque sçavamment qu'il est impossible qu'un cercle soit quarré, confirme le sens que je donne à ces paroles. Il est bien plus naturel que de penser qu'*Aristophane* eût en vûe les fausses solutions des mauvais Géometres, & leurs erreurs déja multipliées sur ce sujet ; cela ne seroit bon qu'auprès d'un peuple de Mathématiciens.

Au reste, je remarque sur cet endroit d'*Aristophane*, une particularité qui me paroît peu connue, quoiqu'elle

n'ait pas échappé à ses Commentateurs; c'est que ce Comique jouoit dans cette scene le fameux *Méton*, auteur * du *Cycle lunaire*. Le nom qu'il donne à ce personnage, & les discours qu'il lui fait tenir, ne laissent aucun lieu d'en douter ; car l'autre Interlocuteur lui demandant *qui il est*, le Géometre lui répond : *Je suis Méton, cet homme bien connu des gens de la Campagne & de toute la Grece*. Ces particularités conviennent parfaitement à *Méton* l'Astronome, à cause de son invention reçue avec tant d'applaudissemens, & des sortes de *Calendriers* que les Astronomes publioient déja, & qui étoient principalement à l'usage des Navigateurs & de ceux qui cultivoient la terre. Plusieurs autres discours ridicules concernant l'Astronomie, que tient *Méton* dans cette scene, donnent un nouveau poids à ce qu'on vient de dire. Cet endroit d'*Aristophane* peut encore avoir trait à une circons-

* Environ 430 ans avant J. C.

tance de la vie de *Méton*, ſçavoir, à la folie ſimulée par laquelle il ſçut habilement s'exempter d'aller à l'expédition de Sicile, ſi funeſte pour tous ceux qui y eurent part. *Méton*, ou manquant de courage, ou prévoyant la mauvaiſe iſſue qu'elle auroit, contrefit l'inſenſé, comme autrefois *Uliſſe* pour ne point aller à la guerre de Troye, & probablement il dut la vie à cette adreſſe.

IV. Ces plaiſanteries d'un Comique qui n'épargnoit pas les hommes même les plus reſpectables, témoin le ſage *Socrate*, n'empêcherent pas *Hippocrate de Chio*, Géometre célébre & environ du même tems, de tenter le problême. La Géométrie y gagna une découverte remarquable, du moins pour ce tems-là. Quoique perſonne n'ait encore pû réuſſir à quarrer le cercle entier, *Hippocrate* trouva la quadrature d'une de ſes parties; c'eſt ce que nous appellons aujourd'hui la lunulle ou les lunulles d'*Hippocrate*, à cauſe de leur figure ſemblable

à celle d'un croiſſant. Cette découverte eſt aujourd'hui ſi connue, même à ceux qui ne ſe ſont jamais élevés au-deſſus de la Géométrie élémentaire, que je puis me diſpenſer de l'expliquer ; je le fais d'autant plus volontiers, que je me ménage par là un peu plus d'étendue pour des choſes plus intéreſſantes.

V. Rien n'étoit plus propre à entretenir une eſpérance flateuſe de la quadrature du cercle que cette découverte ; *Hippocrate* s'y livra en effet, & elle le conduiſit à un malheureux naufrage, ſi nous prenons à la rigueur ce que diſent *Ariſtote*, & *Eudemus* l'hiſtorien de la Géométrie ancienne, cité par *Simplicius.* Tel étoit le raiſonnement d'*Hippocrate*, ſuivant ces Auteurs. Il inſcrivoit à un demi-cercle *A* (*fig.* 1.) 2 un demi-exagone, & ſur chacun des côtés il decrivoit les demi-cercles *B. C. D.* puis un quatrième *E* à part. Après quoi il raiſonnoit ainſi : ces quatre demi-cercles, diſoit-il, ſont égaux au

plus grand *A*; ôtant donc ce qu'ils ont de commun, ſçavoir les trois ſegmens *b. c. d*, on aura les trois lunulles *B. C. D.* & le demi-cercle *E* égaux à l'exagone *A*. Qu'on ôte donc, continuoit-il, de cet eſpace rectiligne la valeur de ces trois lunulles, le reſtant ſera égal au demi-cercle *E*.

Le foible de ce raiſonnement eſt ſi aiſé à ſentir, que malgré l'autorité des Hiſtoriens que j'ai cités, je ne puis me perſuader qu'*Hippocrate* en ait été ſéduit : en effet, il eſt viſible que ces lunulles ne ſont point celles dont il avoit précédemment donné la quadrature. Comment accorder une inattention ſi groſſiere avec la ſagacité que d'autres découvertes lui ſuppoſent ? Toujours porté à juger favorablement de ceux qui ont bien mérité des ſciences, je crois qu'il faut donner quelqu'autre ſens à cela. *Hippocrate* ne vouloit-il point propoſer un moyen qu'il jugeoit propre à conduire quelque jour à la quadrature

du cercle ? il avoit quarré une espece de lunulle, il pouvoit espérer que quelqu'autre plus heureux quarreroit un jour une de celles qui entroient dans son raisonnement; dans ce cas voilà, disoit-il, la quadrature du cercle trouvée. C'est ainsi qu'il transformoit le problême de la duplication du cube en un autre, sçavoir en celui de l'invention des deux moyennes proportionnelles. Au reste, j'abandonne ce Géometre à son mauvais sort, dans l'esprit de ceux qui croiront devoir déférer davantage aux témoignages d'*Aristote*, d'*Eudemus* & d'*Eutocius*, qu'à mes réflexions. Je remarque seulement que les services réels qu'il rendit à la Geométrie de son tems, doivent effacer de son nom la tache que cette erreur y laisseroit imprimée, s'il n'étoit connu que par elle. *

* Quoique la découverte de la lunulle d'*Hippocrate* soit des plus élémentaires, plusieurs Géometres modernes de la premiere classe semblent s'être plûs à l'illustrer par diverses additions

VI. Nous devons à *Aristote* la mémoire de deux Géometres qui prétendirent contribuer de leurs lumieres à la

ingénieuses. M. de *Tchirnausen* a annoncé (*Actes de Leipsik* 1687), que tirant une ligne quelconque du centre *C* (*fig.* 2), l'espace courbe *AID* étoit encore absolument quarrable, & qu'il étoit égal au triangle rectiligne *ACH*, déterminé par la perpendiculaire *DH* à *AB*. La même chose à peu près a été rencontrée par M. *Jean Percks*, qui égale à cet espace le triangle *ADF*, ce qui est plus aisé à appercevoir (*Transf. Phil.* 1699. & *Act. de Leip.* 1700). Voici la démonstration de l'une & de l'autre. L'arc *AI* qui mesure l'angle *ACI* qui est à son centre, est semblable à la moitié de l'arc *AD* qui mesure le même angle, parce qu'il est à la circonférence du cercle dont *BDA* est portion. Donc le segment entier dont *AFI* est la moitié, est semblable au segment *AD*, & par conséquent ils sont entr'eux comme les quarrés des rayons de leur cercle, c'est-à-dire comme 2 à 1. Le demi-segment *AFI* est donc égal à *AD*, & le triangle *ADF* rectiligne égal à l'espace curviligne triangulaire *ADI*. A présent le triangle *ACH* est à *ACB*, comme *AH* à *AB*,

découverte de la quadrature du cercle: mais quoique ce Philoſophe les déſapprouve également, ce ſeroit faire tort à

ou le quarré de *AD* au quarré de *AB*; mais c'eſt encore là la raiſon du triangle *ADF* à *ACB*, à cauſe qu'ils ſont ſemblables; l'angle *ADF* étant toujours demi-droit, puiſqu'il eſt appuyé ſur le quart de cercle *AC*, qui ſe formeroit de la continuation du demi-cercle *BEA*. Le triangle *ADF* eſt donc égal à *ACH*, & par conſéquent l'eſpace curviligne *ADI* eſt égal à l'un ou à l'autre. MM. *Gregori*, *Wallis* & *Caſwel* (*Act. de Leip. lieux cités*) ont trouvé divers autres eſpaces abſolument quarrables dans la lunulle conjugée, c'eſt-à-dire celle qui ſe formeroit par les mêmes circonférences continuées. M. *de l'Hôpital* a donné, (*Mém. de l'Ac.* 1701), une méthode pour retrancher tant qu'on voudra d'eſpaces abſolument quarrables compris entre deux paralleles, comme *GK*, ſoit dans l'ancienne lunulle d'*Hippocrate*, ſoit dans celle qui ſe fait du demi-cercle *AEB*, & des deux quarts de cercle rentrans, comme *Blic*, *Afc*.

Avant tous ces Géometres, M. *Viete* avoit imaginé une maniere beaucoup plus générale

l'un

l'un d'eux que de les ranger dans la même classe : *Bryson* raisonnoit bien mal pour un Géometre, si c'en étoit

de trouver des lunulles absolument quarrables, dont celle d'*Hippocrate* n'est qu'un cas particulier ; car si l'on a un arc de cercle comme *ABCDE* (*fig.* 4.), tel qu'étant divisé en un certain nombre de parties, comme ici en 4 (ou plus généralement *m*), le quarré de *AE* soit à celui de la corde d'une des portions dans la raison de 4 à 1, (ou de *m* à 1), il est visible que faisant l'arc sur *AE* semblable à ceux des segmens *AB*, *BC*, &c. l'espace circulaire courbe *ABCDDEFA*, sera égal au polygone rectiligne *ABCDEA*, ce qui est assez évident pour m'éviter la peine de le démontrer. Or toutes les fois que *m* ne surpassera pas 3, on pourra trouver un pareil arc par la Géometrie plane ; mais le problême sera solide ou plus que solide quand *m* sera un nombre plus grand. Tout cela dépend & se démontre aisément à l'aide de la théorie des sections angulaires, ou des rapports des cordes des arcs multiples ou sous-multiples.

On trouve dans les Mém. *de l'Acad. de Berlin* 1747, un Mémoire de M. *Cramer*, où après avoir réfuté l'opinion de M. *Heinius*,

un, lorſqu'il pretendoit que le cercle étoit moyen proportionnel entre le quarré inſcrit & le circonſcrit. Il étoit

qui avoit prétendu qu'*Hippocrate de Chio* étoit le même qu'*Œnopide de Chio*, autre Géometre & Aſtronome Pythagoricien, il ajoute quelques découvertes nouvelles ſur cette fameuſe lunulle. Mais il ſeroit long de les expliquer ici, & cette note, où j'ai encore bien des choſes à dire, en deviendroit d'une prolixité exceſſive.

L'invention d'*Hippocrate de Chio* n'eſt qu'un exemple particulier d'un eſpace circulaire abſolument quarrable; on peut en trouver une infinité d'autres, & divers Géometres en ont donné des exemples. On a un ouvrage de M. *Artus de Lionne*, Evêque de Gap, intitulé *Curvilinorum amænior contemplatio*, ou ce Prélat Géometre a donné un grand nombre de pareils eſpaces: ce que j'ai dit plus haut des additions de MM. *Tchirnauſen* & *Perks* à la lunulle d'*Hippocrate*, ne lui avoit pas échappé. M. *Varignon* en a donné un nouvel exemple dans les Mém. de l'Acad. de 1703; il y fait voir que ſi l'on a deux cercles concentriques & un ſecteur ACB (*fig.* 5), & qu'on prenne l'arc EF à DE, comme $CA^2 - CD^2 : CD^2$, l'eſpace $EDFAB$ eſt

aisé de voir dès-lors que ce moyen proportionnel étoit seulement l'octogone; car en général deux polygones semblables étant inscrits & circonscrits au cercle, le moyen proportionnel entre

égal au triangle rectiligne *CFA*; car le secteur *CFD* est au secteur *CDE*, comme *FD*: *DE*, conséquemment comme *CAD* — CD^2 à CD^2 par la construction; or cette derniere raison est encore celle de la portion circulaire *EBAB* au secteur *DEC*; le secteur *CFD* est donc égal à *EBAB*, & ajoutant de part & d'autre *FAD*, on a *FABEDF* = au triangle *ACF*. Un jeune Géometre, le frere de M. *Clairault*, de l'Académie des Sciences, âgé de 14 ans, donna en 1730 un petit ouvrage très-ingénieux sur ces espaces circulaires absolument quarrables, dont il a trouvé un grand nombre au-delà de ceux qui étoient déja connus. On a quelque chose de semblable de M. *Saumon* (*Mém. de l'Acad.* 1712). Mais je ne m'arrête pas davantage à ces curiosités géométriques afin d'abréger; ceux qui en seroient plus amateurs qu'elles ne méritent ordinairement, peuvent consulter les livres & les endroits cités.

eux deux eſt l'inſcrit qui a le double de côtés.

Il y a plus de juſteſſe dans la prétention du Géometre *Antiphon* ; celui-ci regardoit le cercle comme un polygone d'une infinité de côtés ; c'eſt du moins ce qu'il eſt naturel de conjecturer d'après ce qu'il diſoit que l'arc diminuant de plus en plus, ſe confondoit enfin avec ſa corde. Mais cette idée fut mal accueillie des Anciens ; le tems n'étoit pas encore venu où l'on oſeroit, qu'on me permette ce terme, enviſager de face l'infini. Au ſurplus c'étoit une idée ſtérile dans ce tems-là. Comment déterminer la raiſon d'un polygone inſcrit au dernier de cette ſuite infinie, qui ſe confond enfin avec le cercle ? *Viete* l'a fait, à la vérité, parmi nous, par le moyen d'une ſuite infinie de termes, mais ſans beaucoup d'avantage pour la meſure du cercle. On en parlera quand il en ſera tems.

VII. On aura quelque lieu de

s'étonner que malgré les recherches de tant de Géometres pour quarrer le cercle, on ait été jusqu'au tems d'*Archimede* * sans en connoître, du moins à peu près, la grandeur ; j'entends dire avec quelque exactitude suffisante pour la pratique. Le Géometre de Syracuse, quoiqu'entierement livré à la théorie la plus sublime, sentit, ce semble, le premier l'utilité de cette connoissance ; ses découvertes sur un grand nombre de corps & de surfaces, qui le ramenoient continuellement à la mesure du cercle, tournerent nécessairement ses vûes de ce côté : laissant donc la recherche de la quadrature absolue, qu'il jugea très-difficile, peut-être impossible, il se borna à en approcher d'assez près, & il rendit par là un service considérable aux Arts. Nous devons à ces sages vûes

* *Archimede* fleurissoit vers le milieu du troisiéme siécle avant J. C. & fut tué fort âgé à la prise de Syracuse, l'an 212 avant l'ere chrétienne.

le livre *de dimensione circuli*, livre où il démontre ces deux vérités d'un usage si journalier ; l'une *que le cercle & tout secteur de cercle est égal au triangle rectangle formé de sa circonférence pour base, & du rayon pour hauteur* ; l'autre *que la circonférence du cercle est moindre que 3 fois & les* $\frac{10}{70}$ *du diametre, mais qu'elle est plus grande que trois fois & les* $\frac{10}{71}$ *de ce même diametre* : d'où il suit que la circonférence differe peu de la premiere de ces limites, & qu'elle est, à peu de chose près, égale à trois fois & $\frac{1}{7}$ du diametre, ou qu'elle lui est très-près, comme 7 à 22 ; & le cercle au quarré du diametre comme 11 à 14. La pratique des Arts, que l'on servira toujours utilement quand à une exactiude médiocre on alliera une grande facilité, a adopté ce rapport, le plus exact de tous ceux qu'on puisse donner en aussi peu de chiffres. *Archimede*, comme nous en assure son commentateur *Eutocius* *,

* *Comm. in librum de dim. circuli.*

ſe propoſa ce ſeul objet ; ſans cela il lui auroit été facile d'atteindre par ſa méthode à une plus grande préciſion. Mais celle-ci eſt ſuffiſante dans les cas les plus ordinaires, & il n'y a plus que les derniers des Artiſans qui l'ignorent, ou qui négligent de s'en ſervir.

VIII. Tout le monde, du moins le monde Géometre, ſçait de quelle maniere *Archimede* parvint à cette approximation ; mais il ne ſera peut-être pas inutile de l'expoſer pour ceux qui, peu verſés dans la Géometrie, n'en auroient pas une idée diſtincte. Il eſt clair, par les plus communes notions, que la circonférence du cercle eſt moindre que le polygone circonſcrit, & plus grande que l'inſcrit. *Archimede* inſcrivit donc & circonſcrivit au cercle deux polygones de 96 côtés chacun, & calcula, par les propriétés du cercle la longueur de leur contour : or ce calcul lui montra que le polygone inſcrit étoit plus grand que $3\frac{10}{71}$ du diametre, & que celui du cir-

confcrit étoit moindre que $3 \frac{10}{70}$ ou $3 \frac{1}{7}$ du diametre. Il eſt donc néceſſaire d'en conclure que la circonférence qui eſt elle-même plus grande que celle du polygone inſcrit, ſurpaſſe à plus forte raiſon 3 fois le diametre augmenté de ſes $\frac{10}{71}$, & que la même circonférence, qui eſt moindre que le contour du polygone circonſcrit, eſt moindre que 3 fois le diametre avec $\frac{1}{7}$.

IX. Pluſieurs perſonnes intéreſſées à ſe faire illuſion pour maintenir quelque prétendue quadrature, ont cherché à éluder cette démonſtration : ils ont objecté, avec une ſorte de confiance capable d'en impoſer, que l'impoſſibilité d'extraire exactement les racines de pluſieurs quarrés qui entrent dans le calcul d'*Archimede*, a dû néceſſairement l'entraîner dans quelques légeres erreurs, & que ces erreurs accumulées dans une longue ſuite d'opérations, ont pû lui faire prendre un nombre trop grand pour le polygone inſcrit, ou un

trop petit pour le circonſcrit, ſuivant que ces racines auroient été priſes par excès ou par défaut. L'objection eſt raiſonnable ; mais cependant elle ne prouve rien de plus, ſinon que ceux qui l'élevent ne ſe ſont pas donné la peine de conſulter l'écrit d'*Archimede*. En effet, ce Géometre avoit trop de ſagacité pour ne pas la prévenir, & la maniere dont il fait ſon calcul ne lui laiſſe aucun lieu ; car il ne prend point la valeur approchée du côté du polygone pour ſa valeur exacte ; mais s'agit-il, par exemple, du côté du polygone inſcrit ? ſon raiſonnement & ſon calcul ſont arrangés de maniere que prenant les racines par défaut, cette erreur, qu'on ne peut éviter, lui produit néceſſairement un nombre moindre que le véritable pour la grandeur du côté du polygone inſcrit. Ce nombre multiplié par celui des côtés du polygone, eſt 6336, le diametre étant 2017 $\frac{1}{4}$: il conclut donc bien légitimement que le

polygone inſcrit eſt plus grand que 6336; or comme cette raiſon eſt certainement plus grande que celle de 3 $\frac{10}{71}$ à 1, il eſt évident que la circonférence du cercle eſt au diametre en une raiſon plus grande que celle de 3 $\frac{10}{71}$ à 1, ou qu'elle eſt plus grande que 3 $\frac{10}{71}$ du diametre. Un artifice ſemblable fait conclure à *Archimede* que le contour du polygone circonſcrit eſt moindre que 14688, le diametre étant 4673 $\frac{1}{2}$, d'où il conclut que la circonférence eſt moindre que les 3 $\frac{10}{70}$ du diametre. On peut s'aſſurer de tout ceci dans le Commentaire d'*Eutocius*, qui ſentant toute l'importance de ce procédé ingénieux, l'a développé avec ſoin. La conſéquence d'*Archimede* eſt inébranlable.

M. *de Lagni* a remarqué dans le calcul d'*Archimede* une nouvelle fineſſe que perſonne n'y avoit apperçu avant lui. Le Géometre Grec ſuppoſe le rayon à la tangente de 30°, comme 265 à 153; ces deux lignes ſont d'ailleurs

comme 1 : $\sqrt{3}$, de ſorte qu'il eſt évident qu'*Archimede* extrayant la racine de 3, l'a déterminé prochainement égale à $\frac{265}{153}$. Or cette valeur eſt préciſément une de celles qu'une analyſe aſſez fine fait rencontrer en cherchant les fractions rationelles les plus ſimples en même temps, & les plus approchantes de la racine cherchée : car $\frac{265}{153}$ équivalent en fractions décimales à 1.732026 + qui ne s'écartent de la vraie racine de 3, ſçavoir 1.732050 + que de $\frac{24}{1000000}$ ou moins d'une 40000e. Mais la valeur trouvée par *Archimede* a ſans doute l'avantage d'être beaucoup plus ſimple. Comme une exactitude ſi recherchée ne peut point être un effet du hazard, ce nous eſt une nouvelle raiſon de remarquer le génie de ce grand homme dans le choix adroit qu'il a ſçu faire des nombres les plus avantageux.

X. Ce ne ſont pas ſeulement les Géometres modernes, qui affectant une préciſion plus grande que celle d'*Archi-*

mede, ont cherché à approcher de plus près du cercle, l'antiquité eut aussi ses laborieux approximateurs; il est, à la vérité, fort probable que la grande difficulté des opérations de leur arithmétique ne leur permit pas d'aller bien loin. On sçait que cette difficulté étoit si grande qu'il leur étoit absolument impossible de manier des chiffres aussi considérables que les nôtres; ainsi ils durent rester beaucoup au-dessous des Modernes. *Appollonius* *, le célébre Géometre, est un de ces anciens approximateurs; il donna un rapport plus approchant de la vérité que celui d'*Archimede*, dans l'ouvrage intitulé Ὠκύτοκος, dont on ne sçait point la signification, & un de ceux de cet Auteur que nous n'avons plus. *Eutocius* nous apprend cela dans son Commentaire sur *Archimede*; il nous y cite aussi un autre

* *Appollonius* de Perge fleurissoit environ 200 ans avant J. C.

Géometre nommé *Philon de Gadare* * (Απογαδαρῶν) qui à l'exemple d'*Appollonius* avoit enchéri ſur le Géometre de Syracuſe, & probablement ſur *Appollonius* même, auquel il eſt poſtérieur : l'un & l'autre, ſuivant le récit d'*Eutocius*, avoient pouſſé leurs approximations à de grands nombres. Ce Commentateur, en nous apprenant que dans le rapport qu'ils avoient donné il entroit des *myriades*, c'eſt-à-dire des dix milliémes, nous donne lieu de juger qu'ils avoient prévenu une pareille erreur au moins, & peut-être une plus conſidérable ; car comme on ne connoiſſoit point alors les fractions décimales, il eſt probable qu'ils avoient rencontré quelqu'une des fractions de la ſuite $\frac{7}{22}$, $\frac{106}{333}$, $\frac{113}{355}$, $\frac{33102}{103993}$, dont la derniere équivaut à une approximation en 10 décimales au moins.

* Il eſt mal-à-propos nommé *Gaditanus* par la plûpart de ceux qui l'ont connu ; la ville de *Gadare* étoit une ville d'Aſie. On ignore le tems où il vivoit.

XI. La découverte d'*Archimede* sur les spirales, quoique peu utile à la mesure du cercle, comme je l'ai déja annoncé (*Chap. I. §. 6.*), a cependant avec elle une sorte d'affinité qui ne me permet pas de la passer sous silence. Elle sert du moins à démontrer ce dont quelques Géometres ont sérieusement douté, s'il étoit possible qu'une ligne droite égalât une courbe. *Viete* le révoquoit en doute, se fondant sur le paradoxe de l'angle de contingence moindre que tout angle rectiligne, qu'on n'avoit pas encore développé, & *Descartes* donna presque dans le même sentiment, du moins il doutoit fort qu'on trouvât jamais la rectification d'aucune courbe; mais ces deux illustres Géometres ne faisoient pas attention dans ce moment à la vérité démontrée par *Archimede*, & *Viete* sur-tout étoit monté sur le ton de paradoxe, lorsqu'il avançoit cette opinion. Il est aujourd'hui connu, je dirois pres-

que trivial, que toute tangente à la ſpirale détermine une ligne droite égale à un arc de cercle aiſément aſſignable. A quoi tient-il donc, dira quelqu'un, que l'on n'ait la quadrature du cercle ? J'en ai déja donné la raiſon ; il faudroit pouvoir tirer cette tangente d'une maniere qui ne dépendît pas de la rectification de cet arc, & c'eſt ce qui eſt impoſſible.

XII. Le même inconvénient, ſi cependant on peut donner ce nom à ce qui paroît devoir être ainſi dans la nature ; le même inconvénient, dis-je, ſe rencontre dans toutes les autres courbes décrites par une combinaiſon de mouvement rectiligne & circulaire. Dans toutes ces courbes la tangente détermine une ligne droite égale, ou en rapport donné avec un arc de cercle. Mais il eſt facile de ſe convaincre, à l'aide d'une certaine métaphyſique de Géométrie, qu'on n'en doit jamais attendre pour la quadrature du cercle. En

effet ſi quelque conſtruction géométrique, où il n'entreroit que des lignes droites, pouvoit déterminer la poſition de la tangente à une courbe de cette nature, ce ſeroit réſoudre un problême ſans avoir égard à ſes conditions eſſentiellement déterminatrices; car il eſt aiſé de ſentir que la ſituation de la tangente dépendant néceſſairement des propriétés de la formation de la courbe, ſi elle eſt décrite par une combinaiſon de mouvemens, il faut connoître leur rapport, & par conſéquent dans les cas dont il s'agit ici, celui du mouvement circulaire avec le rectiligne, ce qui eſt préciſément ce que l'on cherche. Le ſeul moyen de l'éviter ſeroit de trouver quelqu'autre conſtruction qui n'employât qu'un mouvement rectiligne; mais il y auroit de l'abſurdité à le tenter ſeulement, puiſque ce ſeroit viſiblement changer la nature de la courbe.

CHAPITRE III.

Progrès des recherches ſur la quadrature du Cercle parmi les Géometres modernes juſqu'à l'invention des nouveaux calculs.

I. LES premieres années qui ſuivent la renaiſſance des mathématiques en Europe, époque que je fixe au milieu du 15ᵉ ſiécle, où fleurirent *Purbach* & *Regiomontanus*, ne fourniſſent rien de remarquable à cette Hiſtoire. Le dernier de ces Mathématiciens mérite, il eſt vrai, des éloges, pour le ſoin qu'il prit de combattre les prétendues quadratures du Cardinal *de Cuſa*, homme célébre de ſon tems, & qui en auroit impoſé ſi l'on pouvoit en impoſer aux Géometres. Cet examen lui fournit même une occaſion de déterminer des limites de la grandeur du

cercle, quelque peu plus rapprochées que celles d'*Archimede* * : je ne crois cependant pas devoir m'y arrêter, pour passer à des objets plus intéressans.

II. *Metius* est le premier des Modernes à qui l'on doit quelque invention remarquable sur la mesure du cercle. La proportion de 113 à 355, par laquelle il exprima celle du diametre à la circonférence, a une célébrité justement méritée ; elle a, en effet, un avantage bien digne de remarque. C'est qu'elle approche tellement de la vérité, qu'étant exprimée en fractions décimales, elle ne s'écarte que dans le 8e chiffre de la proportion si connue de 1.0000000000, &c. à 3.141592635, &c. Soit bonheur, soit adresse, *Metius* rencontra, de toutes les fractions possibles exprimées en 3 chiffres seulement, celle qui est la plus exacte. Au reste ce *Metius* n'est point *Adrianus Metius*,

* *De quad. circuli adv. Nic. de Cusa.*

Mathématicien connu du commencement du 17[e] siécle, & frere de *Jacques Metius* réputé l'inventeur du téleſcope ; c'eſt *Pierre Metius*, le pere de l'un & de l'autre, Mathématicien des Etats de Hollande, & qui vivoit ſur la fin du 16[e] siécle. Je ne fais cette obſervation que parce que jai remarqué qu'on ſe trompoit ordinairement en attribuant au fils cette invention, que lui-même revendique à ſon pere dans ſes ouvrages.

III. Le célébre M. *Viete*, dont les travaux ont tant aidé l'analyſe, contribua auſſi de quelque choſe à la meſure du cercle. On trouve, ce qui mérite d'être obſervé, dans une expreſſion qu'il donna pour le repréſenter *, on y trouve, dis-je, la premiere idée d'une ſuite infinie de termes. Travaillant à tirer quelque parti de cette connoiſſance, déja ancienne quoique peu goûtée, que

* *Vietæ opera, variorum de rebus math. reſp. cap.* 18.

le cercle étoit le dernier des polygones inſcrits ou cir conſcrits, il démontra que le rapport du quarré inſcrit à ce dernier polygone étoit celui de $\sqrt{\frac{1}{2}}$ à 1 diviſé par $\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}} \times$, &c. & ainſi à l'infini; de maniere que le diametre étant l'unité, le cercle eſt l'unité diviſée par $2\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}} \times$, &c. Il ſeroit laborieux, j'en conviens, de tirer de là une valeur en termes rationaux; ainſi quoique cette découverte conſidérée dans la ſpéculation, ait ſa beauté, je n'y inſiſte pas beaucoup. *Viete* rendit ſans doute un plus grand ſervice à la Géométrie, lorſqu'il établit ce rapport approché du diametre à la circonférence en 11 chiffres; ſçavoir, comme 1, 00000, 00000, à 3, 14159, 26535 +:* l'erreur eſt moindre que

* *Ibid. cap.* 15. M. *Viete* fleuriſſoit vers la fin du 16e ſiécle, il mourut en 1603 âgé de

l'unité dans le dernier nombre, qui finiſſant par 6, excéderoit dès-lors la vérité; c'eſt ce que nous avons voulu deſigner par le ſigne +, qui annonce que le chiffre 5 eſt moindre qu'il ne faut; 6 — ſignifieroit que 6 eſt trop grand. Perſonne que je connoiſſe n'en avoit encore approché de ſi près, & cette approximation peut être regardée comme le premier exemple, le ſignal de celles que pluſieurs Géometres donnerent dans la ſuite.

IV. Il ſemble en effet que les Géometres deſeſperant d'atteindre à la meſure préciſe du cercle, ont cherché à s'en dédommager par des approximations d'une exactitude fort ſupérieure à nos beſoins. Celle de *Viete* fut effacée par celle d'*Adrianus Romanus* : ce Géometre des Pays-bas calcula laborieuſement la grandeur du côté d'un

63 ans. M. de Thou en a fait un éloge étendu dans ſon Hiſtoire univerſelle, *liv.* 129.

polygone de 1073741824 côtés, & détermina par ce moyen le rapport en 16 chiffres de 1, 00000, 00000, 00000, à 3, 14159, 26535, 89793 +; mais ce travail de *Romanus*, quelque grand qu'il ſoit, eſt cependant encore beaucoup inférieur à celui que *Ludolph Van Ceulen* *, ſon contemporain, eut le courage d'entreprendre. On doit à celui-ci une proportion exprimée en 36 chiffres, le diametre étant l'unité ſuivie de 35 zéros; la circonférence eſt entre ces deux nombres: 3, 14159, 26535, 89793, 23846, 26433, 83279, 50288, & le même augmenté d'une unité ſeule.

Quant au procédé de *Ludolph*, il eſt néceſſaire de le rapporter ici, pour

* *Ludoph* étoit de Cologne, d'où lui vient ſon nom de *Van Ceulen*, car Cologne ſe dit en en Hollandois *Ceulen*: il fut long-tems Profeſſeur de Mathématiques en Hollande, à *Amſterdam* ou *Breda*. On ne ſçait preſque rien de lui, parce que *Valere André* ne l'a pas mis dans ſa Bibliotheque Belgique.

donner une idée du travail immenſe qu'il ſurmonta. Il ſuppoſa d'abord le rayon égal à l'unité ſuivie de 75 zéros, & d'après cet immenſe rayon il calcula les cordes des arcs continuellement décroiſſans depuis le quart du cercle juſqu'à l'arc, qui n'eſt que la 36748890763739103232ᵉ de la circonférence; il calcula de même le côté du polygone circonſcrit correſpondant à cet arc, & ayant trouvé les longueurs de ces polygones, il les compara enſemble. Or il trouva qu'ils coincidoient dans leur 36 premiers chiffres; d'où il conclut que ces 36 premiers chiffres exprimoient, à moins d'une unité près, la grandeur de la circonférence; cela eſt aiſé à ſentir. La ſuite des opérations de *Ludolph* eſt expoſée dans quelques-uns de ſes ouvrages *, où les Géometres de ſon tems purent l'examiner. Le P. *Griemberger*, un de ceux qui

* *Fund. Geom. lib. 6. de circulo & adſcriptis. Zetematum Geom. epilogiſmus, p. 92.*

eurent le courage de le faire, aſſura le monde ſçavant de leur juſteſſe, & par conſéquent de celle de l'approximation qu'il en tiroit. (*a*).

Ludolph avoit quelque raiſon de s'applaudir de ſon invention; à l'exemple d'*Archimede*, il voulut en tranſmettre la mémoire à la poſtérité par un monument qui y eût rapport; & il ſouhaita, pour cet effet, qu'on gravât ces deux nombres ſur ſon tombeau (*b*): cette diſpoſition a été exécutée, & ce monument géométrique ſubſiſte encore aujourd'hui, à ce que j'ai lû quelque part.

VI. Cependant à apprécier au juſte le travail immenſe de *Ludolph*, il eſt bien plus propre à lui procurer la réputation d'un infatigable calculateur que d'un homme de génie. On fait, & avec quelque raiſon, en Mathématique, peu de cas de ce qui n'eſt que le

(*a*) *Riccioli. Almag. novum.*

(*b*) *Snellii cyclom. pr.* 31, *p.* 55.

fruit

fruit de la patience. Sans rabaiſſer donc le mérite de *Ludoph*, que nous ſçavons d'ailleurs avoir été un habile analyſte, il me paroît que le Géométre dont je vais parler mérite plus d'éloges pour les découvertes qu'il ajouta à la Cyclométrie.

Willebrord Snellius, c'eſt ce Géometre, ſe propoſa d'abréger ces pénibles opérations, par le moyen de quelques propriétés du cercle qui donnaſſent des limites plus rapprochées que les polygones inſcrits & circonſcrits traités à la maniere d'*Archimede*, & il y réuſſit aſſez heureuſement. Il ſçut démêler deux théorêmes propres à ſon deſſein, & qui lui feroient encore plus d'honneur s'il avoit pû parvenir à les démontrer parfaitement : en effet l'eſpéce de démonſtration qu'il en donne n'eſt pas abſolument convaincante. Il ſuffit ici qu'il ne ſe trompe pas ; car l'illuſtre M. *Huygens* les établit dans la ſuite avec toute la rigueur géométrique.

Voici ces théorêmes fondamentaux de *Snellius* *.

1°. *Si l'on prolonge le diametre* A B *d'un cercle en* D (fig. 7. *n.* 1), *de maniere que* B D *ſoit égale au rayon, la ligne* D F *retranche de la tangente A G un ſegment* A F *moindre & à très-peu de choſe près égal à l'arc contigu A E.*

2°. *Mais que* d f (fig. 7. *n.* 2.) *ſoit tiré de maniere que le ſegment* d l *ſoit égal au rayon, dans ce cas le ſegment* a f *de la tangente ſera plus grand que l'arc* a e ; & comme alors la tangente *a f* eſt égale à deux fois le ſinus, plus une fois la tangente du tiers de l'arc, il ſuit que *deux fois le ſinus plus une fois la tangente d'un arc, forment une ſomme très-approchante de la grandeur du triple de cet arc.*

Ces deux theorêmes réduiſent à moins de la moitié le travail des approximations qui juſqu'alors avoient exigé de ſi laborieux calculs. *Snel-*

* Voyez ſon livre intitulé *Cyclometricus. Prop.* 27. 29.

lius * en donne plusieurs exemples, qui mettent dans un grand jour l'avantage de sa méthode. *Archimede* avoit été obligé d'employer deux polygones, l'un inscrit, l'autre circonscrit, de 96 côtés chacun, pour en tirer son rapport de 7 : 22. Le Géometre moderne y parvient par la connoissance du seul côté de l'exagone, & le polygone de 96 côtés mis en œuvre par celui-ci, lui donne la prop. de 1. 0000000, à 3. 1415926 : il détermine enfin & vérifie celle de *Ludolph*, par un polygone qui n'auroit donné à ce Géometre que les 17 premiers chiffres de son rapport ; il est de la nature de l'opération de *Snellius* de donner toujours plus du double de chiffres vrais que la méthode ordinaire, sans y employer plus de travail. Il auroit pû, avec le côté du dernier polygone de *Ludolph*, s'il eût été parfaitement exact dans tous

* *Ibid. prop.* 31.

ſes chiffres, trouver une approximation en 75 chiffres; le manque de cette condition, car il eſt évident qu'un grand nombre des derniers chiffres étoient incertains, l'empêcha d'aller auſſi loin.

Je dois faire honneur à *Snellius* d'une remarque utile qu'il fait, concernant le calcul des côtés des polygones qui naiſſent de la ſous-diviſion continuelle d'un arc. Si *B D* (*fig.* 8.), dit-il *, eſt la corde d'un arc quelconque, & qu'on diviſe en deux ſon complement *D A*, la corde *D F* eſt moyenne proportionnelle entre le rayon & le diametre augmenté de la corde précédente; mais la corde *A F* eſt moyenne proportionnelle entre le même rayon & le diametre moins la même corde. Ces deux théorêmes, qu'il eſt facile de vérifier par l'analyſe, lui fourniſſent une ſuite d'expreſſions commodes à trouver ſans au-

* *Cyclom. prop.* 1. & 2.

cun calcul, pour les côtés des polygones quelconques formés par la bissection continuelle d'un arc comme *D A*, dont la corde *D B* est connue. Il trouve donc aisément, à l'aide de ces deux théorèmes, que le rayon étant l'unité, & *B D* le côté du triangle équilatéral égal à $\sqrt{3}$, on a $BF = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ & $BG = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$; de même $AF = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ & *A G* le côté du dodécagone $= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$. La loi de la progression est aisée à voir. Où il y a trois divisions successives, il y a trois termes enveloppés continuellement par le signe radical, de maniere que chacun embrasse tout le reste de l'expression. Tous les signes sont positifs pour les cordes *B F*, *B G*, & pour les cordes *A D*, *A F*, *A G*, le premier seul est négatif. Tous les nombres sont 2, ou plus généralement le produit du

rayon par le diametre, & le dernier la valeur de la premiere corde *B D.* Si l'on vouloit après cela trouver la corde du 45ᵉ polygone, à commencer du quarré inſcrit, c'eſt-à-dire la corde de la 70368744177664 de la circonférence, on auroit (la corde du quarré étant $\sqrt{2}$ ſi le diametre eſt 2), on auroit, dis-je, tout d'un coup

$$\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}, \text{ \&c.}$$

continuée juſqu'à la 45ᵉ $\sqrt{2}$ incluſivement.

Snellius a plus fait, il a pris la peine de calculer juſqu'à 55 décimales la valeur de ces cordes *B F*, *B G*, &c. d'où il eſt aiſé de tirer la grandeur du côté qu'on voudra dans cette ſuite. Dans un autre endroit * il prend pour premier polygone celui de 80 côtés, & il donne les limites qui réſultent des polygones inſcrits & circonſcrits, dont le nom-

* *Ibid. prop.* 11.

bre des côtés va de là continuellement en doublant jusqu'au polygone de 5242880 côtés, de maniere qu'une fausse grandeur de la circonférence étant proposée, il est toujours facile, en la réduisant en fraction décimale, de trouver au-dessus de quel polygone circonscrit, ou au-dessous de quel inscrit elle se rencontre; ce qui en démontre fort aisément la fausseté. *

Comme ces limites peuvent avoir une utilité réelle pour ceux qui voudroient, ou qui auroient besoin de faire ces comparaisons, je vais les rapporter ici.

* Quelques autres Géometres, qui ignoroient sans doute ce qu'avoit fait *Snellius*, ont donné des expressions semblables, propres à faciliter le calcul des polygones; on peut voir *Wallis* sur ce sujet dans son *Algebre*, *chap.* 86, & M. *Nicole*, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences, 1747.

Nombre des côtés.	Polygone inſcrit.	Polygone circonſ.
80	3. 140	3. 143
160	3. 141	3. 142
320	3. 1414	3. 1418
640	3. 1415	3. 1416
1280	3. 14158	3. 14160
2560	3. 141591	3. 141595
5120	3. 1415924	3. 1415932
10240	3. 14159260	3. 14159281
40960	3. 14159265	3. 14159266
81920	3. 141592652	3. 141592656
163840	3. 1415926533	3. 1415926539
327680	3. 1415926535	3. 1415926536
655360	3. 14159265357	3. 14159265362
1310720	3. 141592653586	3. 141592653596
2621440	3. 141592653588	3. 141592653589
5242880	3. 1415926535890	3. 1415926535896

VII. Le célébre M. *Huygens* entra peu d'années après *Snellius*, dans la même carriere que celui-ci avoit ouverte. Les premiers coups d'eſſai de ce Mathématicien illuſtre furent d'enrichir la Cyclométrie de pluſieurs vérités utiles; ce que *Snellius* avoit tenté & laiſſé à certains égards imparfaits, M.

Huygens, encore fort jeune, le perfectionna considérablement ; car non seulement il démontra * les théorêmes où son compatriote avoit hésité, mais il ajouta à sa théorie plusieurs autres propriétés remarquables du cercle, dont quelques-unes lui donnerent des limites encore plus resserrées que celles que *Snellius* avoit déterminées. On va les exposer avec la briéveté qu'exigent les limites étroites de cet ouvrage ; elles sont d'ailleurs dignes d'être connues, & probablement les Géometres les verront avec plaisir.

1°. *Tout cercle est plus grand que le polygone inscrit plus le tiers de ce dont il surpasse le polygone inscrit, qui a la moitié moins de côtés;* & cela doit s'entendre non seulement de l'aire du cercle comparée à celle de ces polygones, mais encore de sa circonférence comparée à la leur. Il suit de là que *tout arc de cercle est*

* *De Circuli magnitudine inventa*, 1654.

plus grand que sa corde augmentée du tiers de sa différence avec son sinus. Nommant donc C la corde, S le sinus, l'arc A sera $> \frac{4C - S}{3}$.

2°. *Tout cercle comparé de même au polygone inscrit, est moindre que les* $\frac{2}{3}$ *de ce polygone plus le tiers du polygone circonscrit semblable.* D'où l'on peut inférer que tout arc est moindre que $\frac{2}{3}$ de son sinus augmenté du tiers de sa tangente, ou $< \frac{2}{3} S + \frac{1}{3} T$, nommant T la tangente.

Cette seconde proposition, en partie la même, mais plus générale que celle de *Snellius*, fournit la seconde limite de la circonférence & de l'aire du cercle ; la premiere étoit par défaut, celle-ci est excédente, mais l'une & l'autre approchent considérablement de la vérité, & M. *Huygens* s'en sert avec succès pour le même objet que *Snellius*. Le travail des approximations en est diminué de plus de la moitié.

Cependant, on doit le remarquer, cette méthode ne l'emporte pas encore sur celle de *Snellius*, & même elle reste quelque peu au-dessous; aussi M. *Huygens* ne s'y arrête-t-il pas, & pour surpasser ce dernier Géometre, il propose bientôt deux autres théorêmes qui resserrent encore davantage les limites de la circonférence : il démontre pour cet effet * que,

3°. *Tout arc de cercle est moindre que sa corde augmentée d'une ligne qui soit au tiers de sa différence avec son sinus, comme 4 fois cette corde plus le sinus, à 2 fois le sinus & 3 fois la corde.*

Ceci donne une limite par excès, mais très-rapprochée; elle l'est tellement que lorsque l'arc n'est que d'un petit nombre de degrés, elle coïncide avec la vraie valeur de cet arc jusqu'à la 10e décimale, ou même un terme plus éloigné. Il restoit à en trouver

* *Prop.* 19.

une aussi exacte & qui fût par défaut, *Huygens* le fait par le procédé suivant, ayant trouvé la limite par défaut de l'article 1, & celle par excès de l'article précédent. Qu'*on prenne les $\frac{4}{3}$ de leur différence & qu'on l'ajoute au double de la corde, augmentée du triple du sinus; qu'on fasse enfin cette proportion, comme cette somme est à celle du sinus & de la corde, ainsi leur différence à un quatriéme terme, ce terme ajouté au sinus donnera une ligne moindre que l'arc*, mais aussi voisine de sa vraie valeur que la précédente. L'usage de ces nouvelles limites est merveilleux; par leur secours M. *Huygens* laisse bien loin derriere lui & les Anciens & *Snellius* lui-même. Un exemple fera sentir combien ils approchent de la vérité; en calculant simplement le côté d'un polygone inscrit de 60 côtés, & y appliquant cette méthode, on trouve les 10 premiers chiffres de la proportion de *Ludolph*. On peut juger par là combien

davantage on approcheroit de la vérité, en employant un polygone d'un plus grand nombre de côtés.

Le même traité de M. *Huygens* contient plusieurs approximations pratiques de la circonférence circulaire, que leur simplicité rend dignes de remarque, & propres à avoir place ici. 1°. 8 fois le côté du dodécagone moins le rayon, différent de la circonférence de moins d'un 4000e. 2°. Dans un cercle (*fig.* 9), dont la demi-circonférence *BAC* est divisée en 2 également, que l'autre demi-circonférence le soit en 3, en *E*, *F*, & qu'on tire *AE* & *AF*, les lignes $AG + GH$ égalent le $\frac{1}{4}$ de cercle, à moins d'une 5000e près. 3°. Qu'on ajoute à 3 diametres, $\frac{1}{5}$ du côté du quarré inscrit, la somme égalera la vraie longueur de la circonférence à une 18000e près du diametre. 4°. Je mets ici l'approximation suivante, qui donne indéfiniment la grandeur d'un arc quelconque, quoiqu'elle ait été proposée

par M. *Huygens* dans une autre occasion, sçavoir dans le cours de sa querelle avec M. *Gregori.* Que *ABC* (*fig.* 10) soit un arc de cercle qui ne passe pas la demi-circonférence; après l'avoir partagée en 2 également & sa corde par la ligne *DB*, que *AE* soit égale aux $\frac{2}{3}$ de *AB*, & $EF = \frac{1}{10}$ *ED*; la ligne *FB* étant tirée, qu'on fasse l'angle *FBG* droit, la ligne *AG* sera *quam proximè* égale à l'arc *AB*; car sa différence avec cet arc en sera à peine une 1400e lors même qu'il sera égal au quart du cercle, d'une 13000e quand il en sera la 6e, d'une 90000e enfin quand il n'en sera que la 8e. Il est aisé de sentir combien petite sera cette erreur dans les cas où l'arc à mesurer sera au-dessous de ces portions de la circonférence; elle deviendra infiniment petite. *

* Voici quelques autres moyens d'approcher de très-près de la grandeur d'un arc ou d'un aire circulaire. 1°. M. *Viete* a remarqué que si

VIII. Nous devons encore à M. *Huygens* un autre ouvrage qui paroît se rapporter à l'objet présent ; il est intitulé *Theoremata de Circuli & hyp. quad.* 1651. M. *Huygens* y démontre quelques théorêmes qui durent paroître singuliers dans le tems, mais qui n'auroient pas aujourd'hui le même mérite.

on divise une ligne en moyenne & extrême raison, la ligne entiere est les $\frac{5}{6}$ bien près de la circonférence du cercle décrit sur le petit segment comme diametre. La différence par excès est à peine une 25, 000e du diametre.

2°. Si l'on fait cette proportion ; comme une ligne divisée en moyenne & extrême raison, augmentée du petit segment, est au double de la ligne entiere, ainsi celle dont le quarré égale les $\frac{2}{3}$ de celui du diam. a une quatriéme proportionnelle, cette derniere sera le côté d'un quarré très-prochainement égal au cercle ; car il en différera de moins d'une 75, 000e par défaut (*Vietæ opera*, p. 391 ; 2, 3). Ces approximations m'ont paru avoir une élégance qui méritoit qu'elles fussent connues. Cependant de toutes celles que j'ai rencon-

C'eſt que l'on peut déterminer un eſpace rectiligne qui ſuſpendu d'une certaine maniere, contrebalance, c'eſt-à-dire ſe tienne en équilibre avec un ſegment de cercle, d'ellipſe ou d'hyperbole. Soit, par exemple, le ſegment de cercle ou d'ellipſe *A G B* (*fig.* 11.) dont l'axe ſoit *G I H*, que le triangle

trées, la ſuivante, dûe à un Géometre Polonois, le P. *Kolhanski*, me paroît la plus remarquable par ſa ſimplicité & ſon exactitude.

3°. Que *A C* (*fig.* 6.) ſoit le diametre d'un demi-cercle, *A F* la tangente de 30°, & que ſur la ligne *E C*, perpendiculaire à l'autre extrémité du diametre, on prenne *C E* = 3 fois le rayon; qu'on tire enfin la ligne *F E*, elle ne différera par défaut que de très-peu de choſe de la grandeur de la demi-circonférence; car le rayon étant 1, 0000000, la ligne *F E* ſe trouve de 3, 1415833 +, & la demi-circonférence eſt 3, 1415926 +; ainſi la différence eſt ſeulement $\frac{93}{1,0000000}$ ou moins d'une 1, 000, 00e du rayon. (*Act. de Leipſick*, 1685).

ECF ait sa base $EF = AB$, & sa hauteur *CD* sur l'axe commun, soit $= \sqrt{GI \times IH}$, le triangle sera en équilibre sur le point *C*, avec le segment *AGB*. La même chose arrivera si ce segment est portion d'une hyperbole, comme *aGb* dont *C* est le centre; ce qui se démontre aisément en faisant voir par les propriétés des sections coniques que les momens des lignes *LK MN* ou *mn* sont égaux; une analyse très-simple suffit pour cela. La formule du centre de gravité que donne le calcul intégral, fournit le même résultat. La facilité avec laquelle on en tire tous ces théorêmes, qui couterent tant aux *Guldin*, aux *La Faille* *, &c. rendent

* Le P. *Guldin*, Jésuite, est fort connu pour être l'inventeur de la belle propriété du centre de gravité pour mesurer les figures; & le Pere *La Faille*, de la même Société, publia en 1632 un ouvrage très-ingénieux, quoiqu'un peu prolixe, où il faisoit voir comment le centre de gravité du cercle & sa quadrature tiennent l'un à l'autre.

ces vérités peu remarquables aujourd'hui.

Si l'on demandoit ce qui s'oppose donc à la découverte de la quadrature du cercle, puisque voilà un segment de cercle en équilibre avec une figure rectiligne, à peu près comme *Archimede* quarroit jadis la parabole, je répondrai qu'il manque de connoître la position du centre de gravité de ce segment ; si elle étoit connue on auroit la quadrature du cercle non seulement par cette voie, mais par une infinité d'autres.

VIII. On ne doit point ranger parmi les hommes ordinaires qui ont échoué à la quadrature du cercle un Géometre du milieu du siécle passé, qui prétendit à la solution complete de ce fameux problême. Il est aisé d'appercevoir, pour peu qu'on connoisse l'histoire de la Géométrie, que j'entens parler du célebre P. *Grégoire de S. Vincent.* On ne peut lui refuser la

justice de remarquer que personne avant lui ne s'est porté dans cette recherche avec autant de génie, & même, si nous en exceptons son objet principal, avec autant de succès. La quadrature du cercle qu'il manqua fut pour lui l'occasion d'un grand nombre de découvertes dont quelques-unes n'étoient pas en apparence d'une difficulté fort inférieure à la quadrature elle-même; telles sont les quadratures absolues d'un grand nombre de figures, soit planes, soit de surface courbe. La propriété remarquable des espaces hyperboliques entre les asymptotes, qui sont les logarithmes des abcisses, est une de ces découvertes incidentes qui doit effacer le souvenir de l'erreur qui termine son ouvrage. Bien éloigné donc d'adopter en tout le jugement que *Descartes* porta de ce Géometre, je pense avec d'autres, dont le sentiment peut sans doute contrebalancer celui du Philosophe François, que ses travaux ont droit à notre

eſtime & même preſque à notre admiration. *Huygens* & *Leibnitz* lui ont rendu cette juſtice, le dernier * ſurtout, lorſque dans l'énumération de ceux qui ont le mieux mérité de la Géométrie, il lui donne parmi eux un rang diſtingué.

Grégoire de S. Vincent nous fait lui-même l'hiſtoire de ſes tentatives, dans la préface de ſon ouvrage. La ſpirale d'*Archimede* lui parut d'abord préſenter quelques voies pour arriver à la ſolution qu'il cherchoit avec tant d'ardeur; dans cette eſpérance il en étudia les propriétés, & ce furent ſes profondes recherches qui lui firent découvrir ſa ſimbolifation avec la parabole. Ce chemin ne l'ayant pas conduit où il deſiroit, il ſe tourna vers la quadratrice, qu'il abandonna par le même motif, mais non ſans avoir composé ſur ſon ſujet un immenſe traité, qui

* Actes de Leipſik, 1686.

périt dans l'incendie qui ſuivit la priſe de *Prague* en 163..*. Enfin il s'attacha à comparer divers corps, les uns cylindriques ou ſegmens de ceux-ci, avec d'autres formés de différentes manieres, à étudier profondément leurs rapports & les rapports même de leurs rapports, ce qui l'engagea à ſe former pluſieurs nouvelles théories qui lui fournirent une foule de découvertes, ou du moins de vérités qui, quoique fort aiſées à en juger par notre analyſe, ne laiſſoient pas de fatiguer les Géometres de ſon tems. C'eſt le réſultat de ces dernieres recherches, combinées & dirigées dans la vûe de la quadrature du cercle, qu'il publia dans ſon ouvrage intitulé *Quad. Circuli & hyperbolæ*, 1647.

La prétention de *Grégoire de S. Vincent* étoit d'une nature à ne pas échapper au ſevere examen des Géometres. Son ouvrage n'eut pas plûtôt paru qu'on

* Voyez la préface de ſon livre intitulé *Quad. Circuli & hyp.*

s'empressa de toutes parts à approfondir ses raisonnemens & sa méthode : le nom de l'Auteur annonçoit des efforts dignes d'attention. En vulgaire Géometre il ne se bornoit pas à la quadrature définie du cercle, & du cercle seul ; il embrassoit également dans ses vûes l'hyperbole & les segmens quelconques de ces figures ; il donnoit enfin quatre méthodes différentes pour parvenir au même but. La célébrité de la discussion à laquelle cet ouvrage donna lieu, m'engage à la rapporter avec quelque étendue ; on va donc expliquer la premiere & la principale de ces méthodes : quoiqu'elle aboutisse à une erreur, elle est fondée sur une si fine théorie de Géométrie, qu'on croit faire quelque plaisir aux Géometres en la leur présentant.

1°. Qu'on imagine, dit *Grégoire de S. Vincent*, sur un même axe *AB* (*fig.* 12, 13.) un demi-cercle *AB* & deux paraboles égales situées en sens con-

traire, *ABLC*, *BAPD*, & dont les ordonnées *AC*, *BD* sont égales entre elles, & à *AB* ou à leur parametre commun. Il démontroit d'abord, & c'est une vérité avouée par la saine Géométrie, que si l'on imagine la parabole *ACB* dressée ou relevée perpendiculairement au plan de la figure, & qu'on conçoive un solide dont les coupes perpendiculaires à ce plan soient toujours les rectangles $GL \times GP$; ce solide sera égal au cylindre sur la base circulaire *AYB*, dont la hauteur est *AB* : & de plus chaque segment de ce solide parabolique, comme celui sur la base *AGP*, est égal au segment correspondant du cylindre, ou $AGS \times AB$. De là il suit que si l'on a la mesure absolue de ces segmens du premier solide, ou du solide entier, on aura la quadrature du cercle; car la grandeur du segment de cylindre donnera celle de sa base circulaire. On parviendra aussi à cette quadrature en connoissant simple-

ment le rapport de ces ſegmens; car dès-lors on auroit celui des ſegmens circulaires *AGS*, *ARY*: or il eſt reconnu qu'il ne faut rien de plus pour la quadrature du cercle, même indéfinie.

2°. *Grégoire de S. Vincent* chercha donc à meſurer ces ſolides, ou à aſſigner du moins leurs raiſons; or il crut y parvenir de la maniere ſuivante. Imaginons, outre les deux paraboles *ABC*, *ABD*, deux autres *AIiD*, *CHhB*, qui touchent leur axe commun en *A*, *B*; qu'on tire enſuite les diagonales *AD*, *CB*, il ſe formera du ſegment parabolique *AGI* par ſon correſpondant *AGHC*, un ſolide fort irrégulier, mais dont la ſolidité abſolue eſt aſſignable : on connoîtra donc la raiſon de ce ſolide *AGI* × *AGHC* à celui de *GiIR* × *HRGh*. Ces deux ſolides, que pour abréger je nommerai reſpectivement *A*, *B*, ſont dans le cas particulier ou *AG* = au demi-rayon; ces ſolides, dis-je, ſont comme 53 à 203.

Il

Il se formera de même du triangle *AOG* × *AGKC* un solide tout rectiligne dont on aura la grandeur absolue, de même que celle du solide de *GOoR* × *GKYR*, & par conséquent leur rapport, qui dans le même cas de *AG* = au demi-rayon est 5 : 11. Que ces deux solides soient nommés *C*, *D*, c'est de la connoissance de ces solides & de leurs raisons que *Grégoire de S. Vincent* déduisoit celle des deux premiers, dont on a vû que dépendoit la quadrature du cercle ; il le faisoit par le raisonnement qui suit :

Si l'on tire une perpendiculaire quelconque à *AB*, comme *MN*, on a, par les propriétés des coniques, les lignes *GM*, *GL*, *GK* continuement proportionnelles, de même que *GM*, *GK*, *GH*, de maniere qu'interposant une moyenne *G*Δ entre *GK* & *GH*, on a les cinq lignes *GM*, *GL*, *GK*, *G*Δ, *GH* en proportion continue. Par la même raison les lignes *GN*, *GP*,

GO, $G\delta$, GI ſont continuement proportionnelles, & par conſéquent les rectangles $GM \times GN$, $GL \times GP$, $GK \times GO$, $G\Delta \times G\delta$, $GH \times GI$ le ſont auſſi; & la même choſe arrive par tout ailleurs où l'on tirera une parallele à MN, on y a les rectangles $gm \times gn$, $gl \times gp$, $gk \times go$, $g\Delta' \times g\delta'$, $gh \times gi$, en raiſon continue. Par conſéquent le rapport des rectangles $GK \times GO$ à $gk \times go$, les troiſiémes en ordre, ſera doublé de celui des précédens $GL \times GP$, $gl \times gp$, & la raiſon des derniers $GH \times GI$, $gh \times gi$, ſera quadruplée de celle de ceux que je viens de nommer. On le verra ſans peine en conſidérant ces deux ſuites de quantités continuement proportionnelles, 1, 2, 4, 8, 16, &c. & 1, 3, 9, 27, 81, où l'on voit que la raiſon de 9 à 4 eſt doublée de celle de 2 à 3, & celle de 16 à 81 quadruplée de cette même raiſon. Par conſéquent la raiſon des rectangles de l'ordre de $GH \times GI$,

gh × *gi*, ſera doublée de celle de l'ordre des *GK* × *GO*, *gk* × *go*. Il y aura donc entre les élémens ſemblables des ſolides *AGI* × *AGHC*, *GIIR* × *GRHH*, c'eſt-à-dire *A*, *B*, une raiſon ſemblablement multipliée de la raiſon qui regne entre les élémens analogues des ſolides *AGO* × *AGKC*; *GROO* × *GRYK*, c'eſt-à-dire *C*, *D*, comme celle-ci l'eſt de la raiſon des élémens des ſolides *AGP* × *AGKC*, *GRPP* × *GRLL*, ou *E* & *F*. *Grégoire de S. Vincent* concluoit enfin de tout ce raiſonnement que la raiſon des premiers ſolides *A*, *B* contenoit celle des ſolides *C*, *D*, comme celle-ci contenoit la troiſiéme, ſçavoir celle des ſolides *E*, *F*; or les deux premieres raiſons ſont toujours données, la derniere le ſera donc auſſi; & on a fait voir que cette raiſon étant une fois connue, on étoit en poſſeſſion de la quadrature du cercle: par conſéquent cette quadrature, diſoit-il, eſt trouvée.

Tel étoit le raiſonnement de ce fameux Géometre, raiſonnement qui ſe ſoutient conformément à la ſaine Géométrie, juſqu'à la derniere concluſion où ſe trouve l'erreur. J'en vais développer les preuves, en même tems que je rendrai compte des contradictions & des querelles qui s'éleverent à ce ſujet.

Deſcartes fut un des premiers qui porta quelque jugement ſur la prétendue quadrature & le livre du Géometre Flamand; il leur fut très-peu favorable, la quadrature fut déclarée fauſſe, & le livre traité de médiocre & même d'embrouillé. On trouve les raiſons de ce jugement dans une lettre écrite à *Schotten* *, on n'en admettra cependant que la premiere partie; car quant à la médiocrité, nous avons fait voir qu'*Huygens* & *Leibnitz* en penſoient bien autrement; & quant à l'obſcurité,

* Lettres de *Deſcartes*, *in*-4°, t. 3. Lettre 117.

nous pouvons dire que *Descartes* n'y en trouva qu'à cause du dégoût violent qu'il avoit pris pour la méthode des Géometres anciens; *Grégoire de S. Vincent* est un des plus intelligibles de ceux qui ont suivi cette route difficile. Je reviens à la Lettre de *Descartes*; il y dit avoir suivi pied à pied *Grégoire de S. Vincent*, depuis la proportion où il conclut sa quadrature jusqu'à une autre qu'il appelle en preuve & qui est fausse; elle l'est en effet visiblement suivant le sens que lui donne *Descartes*, mais il y a lieu à contestation si on l'entend dans celui que les défenseurs du *P. de S. Vincent* lui ont donné, suivant la doctrine & l'instruction de leur maître: ainsi la décision du Philosophe François ne tranche point la difficulté.

Descartes se contenta de communiquer ce qu'il pensoit sur *Grégoire de S. Vincent* à quelques-uns de ceux qui le consulterent; mais plusieurs autres

Géometres écrivirent pour le réfuter; à la vérité tous ne le firent pas aussi heureusement. *Roberval* & quelques autres, pour renverser l'édifice élevé par le Géometre Flamand, l'attaquerent dans les endroits où il étoit le plus solide. Ils établirent un faux systême de proportions, ce qui donna lieu à un défenseur de la quadrature proposée de les réfuter eux-mêmes avec succès & avec solidité. M. *Huygens* & le Pere *Lieutaud*, Jésuite & Géometre habile, attaquerent les prétentions de *Grégoire de S. Vincent* avec plus de solidité; l'un dans un petit écrit intitulé *Exetasis, seu examen cyclometris Gregorii à Sancto Vincentio*, 1652, modele de netteté & de précision; l'autre dans un ouvrage plus étendu & intitulé, *Examen novæ quadraturæ*, &c. 1664.

Grégoire de S. Vincent trouva de son côté de zélés defenseurs dans quelques-uns de ses disciples, deux sur-tout se distinguerent dans cette lice, *Xavier*

Ainſcom & *Alphonſe de Saraſſa*. Celui-ci y parut le premier, pour réfuter les prétentions de *Roberval* & de ſes adhérens, & ſur-tout le jugement que le P. *Merſenne* avoit imprimé dans ſes *Reflexiones phiſico math.* Ce P. y avoit parlé de la maniere la plus mépriſante du livre de *Grégoire de S. Vincent*; & quant à la quadrature en queſtion, il la rejettoit, fondé ſur cette ſeule raiſon que ſon auteur paroiſſoit la réduire à ce problême : étant données trois grandeurs & les logarithmes de deux, trouver celui de la troiſiéme, problême qu'il regardoit comme auſſi inſoluble que celui de la quadrature du cercle. Le P. *Merſenne* avoit tort; mais ſuppoſant même qu'il eut eu raiſon, ç'auroit encore été une grande & belle découverte que de réduire ces deux problêmes très-iſolés à n'être plus qu'une même & unique queſtion. On regarderoit comme une des vérités les plus remarquables & les plus utiles de la Géométrie,

une liaiſon bien établie entre la quadrature du cercle & de l'hyperbole, liaiſon telle que l'une étant connue, l'autre le fût néceſſairement. C'étoit cependant ce que le P. *Merſenne* reprochoit à *Grégoire de S. Vincent*, &, comme je l'ai déja dit, il ſe trompoit même en cela ; ainſi *Saraſſa* n'eut pas de la peine à lui répondre avec avantage, & à détruire victorieuſement ſes objections.

Quant à M. *Huygens* & le P. *Lieutaud*, ils porterent des coups plus réels à la quadrature prétendue ; ils la réduiſirent à examiner de quel ſens étoit ſuſceptible cette conſéquence de *Grégoire de S. Vincent*, que la raiſon des deux premiers ſolides contenoit celle des deux ſeconds, comme celle-ci contenoit la troiſiéme ; & ils faiſoient voir que de quelque côté qu'on l'entendît il n'en réſultoit rien qui approchât de la quadrature du cercle. En effet on ne peut donner à ces paroles que ces deux

ſens; une raiſon eſt à une autre comme une troiſiéme à une quatriéme, quand étant réduites à un même conſéquent, leurs antécédens ſont proportionnels; ou bien lorſque la premiere raiſon eſt autant multipliée de la ſeconde que la troiſiéme l'eſt de la quatriéme: il ne réſulte rien d'avantageux de ces deux ſens pour la quadrature conteſtée. Il n'y en avoit plus qu'un troiſiéme à diſcuter, & c'étoit le dernier retranchement où les défenſeurs de la quadrature puſſent ſe retirer; il leur reſtoit, dis-je, à maintenir que la premiere raiſon, ſçavoir celle des ſolides *A*, *B*, étoit compoſée d'une ſuite de raiſons partiales, ſemblablement multipliées de chacune des raiſons partiales qui compoſent la raiſon totale de *C*, *D*; que celle-ci étoient multipliées de celles qui compoſoient la raiſon cherchée de *E*, *F*. Mais quel avantage peut-on tirer de là pour la détermination de cette raiſon, diſoit le P. *Lieutaud*? elle eſt encore

aussi inconnue qu'auparavant. Pourquoi, enfin, remarquoit-il avec M. *Huygens*, si cette derniere raison étoit donnée par les précédentes, pourquoi le P. *Grégoire de S. Vincent* avoit-il négligé de l'assigner ? n'est-ce pas que réellement cette conséquence, *la premiere raison contient la seconde comme celle-ci la troisiéme*, n'est qu'une phrase vuide de sens, qui laisse encore la question indécise & à résoudre ?

Ce fut pour répondre à ces adversaires qu'*Ainscom*, autre disciple du P. *de S. Vincent*, parut sur la lice. Il publia un livre intitulé, *Deductio quadraturarum à P. G. à S. Vincent. expositarum*, contre *Huygens* & *Lieutaud* principalement, & par occasion contre les autres contradicteurs de son maître. Le nœud de la principale difficulté à résoudre étoit dans quel sens on devoit entendre ce rapport de raisons, le fondement de la quadrature. *Ainscom* prétendit dans cette réponse que cette

troisiéme maniere qu'*Huygens* n'avoit pas même soupçonné, à cause de son éloignement du sens ordinaire; que *Lieutaud* avoit rejetté comme ne pouvant conduire à rien, & aussi difficile à déterminer que la quadrature elle-même, étoit cependant la véritable, la seule que *Grégoire de S. Vincent* eut entendue; que cette derniere raison enfin pouvoit se déterminer par des rapports d'espaces hyperboliques. Car, disoit-il, si l'on prend deux espaces hyperboliques entre les asymptotes, & que ces espaces soient tels que chaque partie de l'un soit semblablement multiple de chaque partie de l'autre que les premieres raisons partiales sont multipliées des secondes, le premier de ces espaces sera autant multiple du second que la premiere raison totale contient la seconde. Le nombre qui exprimeta le rapport de ces espaces hyperboliques sera donc l'exposant du rapport multiplié de la premiere à la

ſeconde, c'eſt-à-dire que ſi n eſt ce nombre & la premiere raiſon, ſçavoir celle des ſolides *A*, *B* ſoit *R*, la ſeconde ou celle des ſolides *C*, *D* ſoit *P*; la raiſon *R* ſera multipliée ſuivant l'expoſant n de la raiſon *P*, & par conſéquent celle-ci le ſera ſemblablement de la troiſiéme cherchée; elle eſt par conſéquent donnée & connue ſuivant lui. Au reſte ce nouveau défenſeur de *Grégoire de S. Vincent* tomboit encore, malgré les inſtances de *Huygens* & de *Lieutaud*, dans le même défaut que ſon maître. Le moyen le plus aiſé de confondre ſes adverſaires, qui prétendoient cette derniere raiſon inaſſignable, étoit ſans doute de l'aſſigner; il ne le faiſoit cependant point encore, ce qui prouve évidemment, comme le remarquoit M. *Huygens*, que lui & ſon maître ne cherchoient qu'à prolonger la querelle, ſans ſe mettre en peine d'éclaircir la vérité, ou plûtôt en craignant le ſuccès: ils eſpéroient du moins

par là de laiſſer la queſtion indéciſe aux yeux de la poſtérité & de leurs contemporains. Mais le P. *Lieutaud* paroît l'avoir terminée dès-lors entierement ; il n'attendoit que cette explication du ſens des paroles de *Grégoire de S. Vincent* pour lui donner le dernier coup. En l'admettant de même que la maniere dont ils prétendoient l'aſſigner, par le moyen de ces eſpaces hyperboliques dont j'ai parlé, il fit voir qu'il en reſultoit préciſément le ſecond ſens qu'eux-mêmes avoient rejetté. Son raiſonnement eſt légitime en effet, le moyen indiqué par *Ainſcom* donneroit deux eſpaces hyperboliques néceſſairement doubles l'un de l'autre, & par conſéquent la premiere raiſon ſera doublée de la ſeconde, & celle-ci le ſera par conſéquent de la troiſiéme. Or tout cela eſt faux, car on ne peut pas dire que la raiſon de 53 à 203 ſoit en aucune maniere doublée de celle de 5 à 11. Il eſt bien clair par là que

Grégoire de S. Vincent ſe trompoit, & l'on n'en peut douter, quoiqu'en ait dit ſon panégyriſte le P. *C* dans ſa préface au traité du calcul intégral de M. *Stone*.

Quant aux autres quadratures que propoſoit *Grégoire de S. Vincent*, elles aboutiſſent toutes à un ſemblable raiſonnement qui compare pluſieurs raiſons entr'elles; ainſi le défaut objecté à la premiere ſe trouve dans celles-ci. Un Géometre Allemand, nommé *Kinner*, dont j'ai l'ouvrage, entreprit cependant la défenſe de la ſeconde; mais cette défenſe, comme celles de *Saraſſa* & *Ainſcom*, ſolide dans les points non conteſtés, ne réſoud pas plus qu'elles le nœud de la difficulté.

VII. La querelle entre *Grégoire de S. Vincent* ou ſes diſciples, & les contradicteurs de ſa quadrature, étoit à peine finie, qu'un ouvrage publié par un Géometre Anglois occaſionna une nouvelle diſcuſſion; la cauſe en étoit

d'une nature bien différente de celle qu'on vient de voir. M. *Jacques Gregori*, c'eſt ce Géometre, prétendit démontrer, dans un traité intitulé *Vera circuli & hyperbolæ quadratura*, que ces quadratures étoient impoſſibles. Le titre de ce livre, quoique contradictoire, ce ſemble, avec ſon objet, ne l'eſt cependant pas en Géométrie; c'eſt réſoudre un problême que d'en démontrer l'impoſſibilité : ainſi M. *Gregori* ayant, à ſon avis, démontré celle de la quadrature du cercle, pouvoit donner légitimement à ſon ouvrage le titre qu'il porte. Les quadratures approchées qu'il y donne ſont les ſeules vraies, puiſqu'elles ſont les ſeules qui ſoient poſſibles.

M. *Gregori* établiſſoit cette impoſſibilité ſur quelques propriétés des polygones inſcrits & circonſcrits, & ſur la nature de certaines ſuites qu'il nomme convergentes. Elles different des ſuites ordinaires en ce que dans celles-ci ce

feroit la fomme de tous les termes qui donneroit la vraie valeur cherchée, & qu'on en approche d'autant plus qu'on en prend un plus grand nombre: dans les fuites de *Gregori* chaque terme exprime la valeur cherchée d'autant plus exactement qu'il eft plus éloigné du premier.

Si *C A D B* (*fig.* 14, 15, 16) repréfente un fecteur circulaire, elliptique ou hyperbolique, après avoir tiré la corde *A B*, le diametre *C F*, les tangentes *A F*, *B F*, puis encore les cordes *A D*, *B D* & la tangente *G D E*, on aura quatre fecteurs de polygone, dont il y en aura deux infcrits & deux circonfcrits. Or le rapport de ces figures eft tel que le polygone *C A D B* eft moyen géométrique entre l'infcrit *C A B* & le circonfcrit correfpondant *C A F B*; mais le polygone *C A G D E B* eft moyen harmonique entre ce dernier *C A F B* & *C A D B*. Et fi l'on continue à l'infini une infcrip-

tion & une circonſcription ſemblable, il ſe formera une ſuite infinie de polygones inſcrits & circonſcrits qui obſerveront toujours la loi précédente ; ce qui fournit une méthode très-ſimple pour déterminer tous ces polygones, les deux premiers ſeuls étant donnés ; car qu'ils ſoient *A* & *B*, le ſecond inſcrit *C* ſera moyen entre *A* & *B*, & le ſecond circonſcrit *D* moyen harmonique entre *C*, *B* ; de même le troiſiéme inſcrit *E* ſera moyen entre *C*, *D*, & le troiſiéme circonſcrit moyen harmonique entre *E* & *D*, & ainſi à l'infini. Cette ſuite enfin ſe terminera à deux termes égaux entr'eux & au ſecteur que je nomme *S*, & l'on auroit conſéquemment la quadrature du cercle & de l'hyperbole ſi l'on pouvoit exprimer ce dernier terme.

Il n'eſt pas douteux que la loi d'une progreſſion ſemblable ne puiſſe être telle qu'il ſoit poſſible dans certains cas de trouver cette terminaiſon ; M. *Gregori* en donne

quelques exemples où il réussit heureusement ; mais dans celui dont il s'agit ici, non seulement il désespere d'y réussir, mais il entreprend même de prouver qu'il est impossible de le faire : son raisonnement approche beaucoup de la démonstration, & se réduit au suivant.

Il est de la nature d'une suite semblable à celle qu'on vient de décrire, que chaque terme, *C*, par ex. (*fig.* 17) soit semblablement composé de *A*, *B*, que *E* l'est de *C* & *D*, &c. & de même *D* est semblablement composé de *A*, *B*, que *F* de *C*, *D*, &c. C'est encore une conséquence de la génération de cette suite que chaque terme, le dixiéme, par exemple, après *A*, *B*, soit semblablement composé de *A*, *B* que le dixiéme après *E*, *F* l'est de ces derniers. Par conséquent le terme infiniment éloigné, & qui l'est par là également de tous ceux de la suite, sera semblablement composé de chacun des paires

A, *B* ou *C*, *D* ou *E*, *F*, &c. & si malgré ce raisonnement on pouvoit encore douter de la certitude de cette conclusion, on la confirmeroit en remarquant que lorsque par sa nature le dernier terme est assignable, on le trouve par cette voie (*voy. prop.* 7 *& suiv.*), ce qui ne seroit point si cette propriété du dernier terme étoit fausse : on peut encore s'en assurer par d'autres raisonnemens.

Si l'on examine à présent la nature des premiers termes de cette suite, on s'appercevra que le dernier terme cherché est inassignable analytiquement & en termes finis. Car réduisant les termes *A*, *B* à ceux de cette forme ; $a^3 + a^2 b$ & $ab^2 + b^3$; afin d'éviter que les seconds deviennent irrationnels, on a pour ceux-ci $aab + b^2 a$ & $2bba$. Cela étant, le dernier terme *S* de cette suite convergente, qui exprime le secteur circulaire ou hyperbolique, devroit être une quantité semblablement

composée des termes $a^3 + a^2 b$ & $ab^2 + b^3$, que de ceux-ci $aab + bba$ & $2bba$; c'est-à-dire que les mêmes opérations analytiques qui formeroient ce terme S des deux premiers, étant appliqués aux deux seconds, devroient produire la même quantité; or c'est ce qui ne se peut en aucune maniere, car le terme a^3, puissance plus élevée qu'aucune autre de la même lettre dans les autres termes, donnera nécessairement dans les produits semblables une puissance plus élevée, & il en résultera aussi une expression plus composée de premiers termes, qui le sont davantage que les seconds. Le dernier terme S ne peut donc s'exprimer analytiquement en termes finis, puisqu'il faudroit pour cela que cette expression analytique fût un même produit résultant de deux paires de grandeurs, qui, soumis aux mêmes opérations, doivent donner des produits différens & inégaux. On peut voir ce raisonnement plus développé

dans la prop. 11 du traité de M. *Gregori.* J'ajouterai à ces raiſons que ce n'eſt que dans l'infini que peut diſparoître cette inégalité ; ainſi l'expreſſion du dernier terme *S* doit être d'une compoſition, d'un degré infini ; or c'eſt ce qui n'eſt ſuſceptible d'aucune réſolution analytique en termes finis.

Les démonſtrations négatives ſemblent avoir ce défaut, de ne point porter la même lumiere que les poſitives, & c'eſt peut-être par cette raiſon que celles qui ont eu pour objet de démontrer l'impoſſibilité de la quadrature du cercle n'ont jamais eu un grand ſuccès. Celle-ci ne parut point concluante à M. *Huygens* ; prié d'en dire ſon avis, de même que du reſte de l'ouvrage, il l'expoſa par un écrit qui parut dans le Journal des Sçavans du deux Juillet 1668 : il y prétendit renverſer entierement les démonſtrations de *Gregori.* Celui-ci répondit peu après dans les *Tranſactions*, *n.* 37 ; il y convint de quelques

inadvertances qui avoient procuré à ſon adverſaire un léger avantage ; il y établiſſoit d'ailleurs aſſez ſolidement d'autres points conteſtés par *Huygens* pour que celui-ci s'y rendît ; mais il perſiſta dans un nouvel écrit inſéré dans le même Journal de la même année, il perſiſta, dis-je, à prétendre que la démonſtration principale ne concluoit pas tout ce que *Gregori* en inféroit ; il paroiſſoit ſe rendre, à la vérité, ſur l'impoſſibilité de la quadrature indéfinie, mais il nioit toujours que l'on pût en conclurre la même choſe à l'égard de celle du cercle entier, ou de quelqu'un de ſes ſegmens ou ſecteurs déterminés. M. *Gregori* répondit de nouveau à ces objections, & fit un dernier effort pour y établir ſon ſentiment ; on trouve entr'autres, dans la réplique, un raiſonnement qui paroît conclurre qu'afin que la raiſon d'un ſecteur à un des polygones inſcrits fût exprimée analytiquement, il fau-

droit que cette expreſſion fût d'un degré infiniment élevé. Cette conſéquence eſt conforme à ce qui eſt toujours arrivé par quelque méthode qu'on ait entrepris ce fameux problême ; l'analyſe a toujours donné des expreſſions en termes infinis, qui ne ſont que des équations d'une dimenſion infinie. Il réſulte de là une grande préſomption en faveur du raiſonnement de M. *Gregori*. Les Géometres admettent aujourd'hui d'une commune voix que la quadrature indéfinie du cercle eſt impoſſible ; mais quant à la quadrature définie, on ſuſpend encore ſon jugement. L'impoſſibilité de la premiere eſpece de quadrature n'entraîne pas néceſſairement celle de la ſeconde, puiſque M. *Bernoulli* a démontré qu'il y avoit des courbes qui quoique non quarrables indéfiniment, ne laiſſent pas d'admettre un ou pluſieurs eſpaces déterminés abſolument quarrables : on n'a point encore démontré que cela ne

puisse pas arriver dans le cercle.

Il y eut aussi quelques contestations entre ces deux Géometres, sur le mérite des approximations qu'ils avoient donné dans leurs ouvrages. M. *Huygens* non seulement mit celles de *Gregori* au-dessous des siennes, mais remarquoit que quelques-unes d'entre elles étoient les mêmes que celles qu'il avoit déja publiées dans d'autres termes. La remarque étoit vraie ; cependant le travail de *Gregori* ne laisse pas d'avoir quelque avantage, & de l'emporter à certains égards sur celui de M. *Huygens*. En effet les approximations que celui-ci avoit borné au cercle, & cela parce que sa méthode ne pouvoit le conduire plus loin, ces approximations, dis-je, conviennent également à l'hyperbole. La méthode du Géometre Anglois ne sépare point ces deux courbes, qui tiennent l'une à l'autre par tant de propriétés analogues. Cette raison me détermine à les

remetire

remettre ici ſous ce point de vûe plus général. Que *A*, *C* repréſentent deux polygones ou ſecteurs de polygones inſcrits de ſuite, comme on l'a déja expliqué, ſoit au cercle, ſoit à l'ellipſe ou l'hyperbole, comme les polygones *CAB*, *CADB* (*fig.* 14, 15, 16); & que *B*, *D* ſoient les polygones circonſcrits correſpondans à *A*, *C*, tels que *CAEB*, *CAGFB*. Le ſecteur eſt plus grand que le polygone *C* $\pm$ le tiers de la différence entre *A* & *C*. Le ſigne plus eſt pour le cercle, & celui de moins pour l'hyperbole; mais le même ſecteur eſt moindre que la ſeconde des deux moyennes, ſoit arithmétiques, ſoit géométriques entre les polygones *C*, *D*. J'entens par la ſeconde la plus voiſine du circonſcrit, qui eſt la plus grande dans le cercle & l'ellipſe, & la moindre dans l'hyperbole. Les deux limites ſont par conſéquent $\frac{4C - A}{3}$ & $\frac{C + 2D}{3}$. M. *Huygens*

revendiquoit ces deux déterminations; mais on peut dire qu'indépendamment de la généralité que leur donnoit M. *Gregori*, la méthode qui l'y conduisoit les lui rendoit propres. M. *Gregori* ajoute qu'on en approchera de plus près en prenant entre les limites précédentes la plus grande des quatre moyennes arithmétiques, sçavoir $\frac{8D + 8C - A}{15}$, d'où il résulte le triple des chiffres exacts dans l'approximation qu'on en tire; je veux dire que si les limites précédentes donnent une valeur de la courbe qui ne differe de la véritable que d'une 100000e, la derniere en donnera une qui ne différera que d'une 1, 00000, 00000, 00000e; appliquons ces vérités, avec M. *Gregori*, plus particulierement aux arcs de cercle.

Si A est la corde d'un arc & B les deux cordes prises ensemble des moitiés de cet arc, qu'on fasse 1°. $A + B : B$

:: $2B : C$, on aura $\frac{8C + 8B - A}{15}$ plus grande que l'arc, la difference n'étant qu'environ $\frac{1}{300000}$ lorſque l'arc égale le quart du cercle, & beaucoup moindre quand il ſera une moindre portion de la circonférence. 2°. Que $A : B :: B : D$, alors $\frac{12C + 4B - D}{15}$ ſera moindre que l'arc & en différera à peine d'une 60000e, lors même qu'il égalera le quart du cercle. Qu'on prenne enfin entre ces limites la ſeconde des ſix moyennes arithmétiques (en commençant par la plus grande), elle ſera moindre que l'arc, & l'erreur n'égalera pas $\frac{1}{3000000}$ dans le cas où il ſeroit un quart de cercle. Ces dernieres approximations de *Gregori* l'emportent inconteſtablement ſur celles de ſon adverſaire, elles ont même cet avantage, d'être ſans comparaiſon plus aiſées à calculer. On peut voir toutes les piéces de cette conteſtation litté-

raire dans le ſecond tome des Œuvres d'*Huygens*, on y trouve même le traité de *Gregori* qui y a été inſéré, ſans doute pour épargner au Lecteur la peine de recourir ailleurs à un ouvrage devenu rare & difficile à ſe procurer.

X. Je dois remarquer ici que M. *Gregori* n'eſt pas le ſeul qui ait réputé la quadrature du cercle impoſſible; divers autres avant & après lui l'ont regardée comme telle, & il faut convenir que quoique leur ſentiment ne ſoit pas appuyé ſur une démonſtration complette, il a néanmoins une probabilité qui approche beaucoup de la certitude: en effet, quel motif d'en juger ainſi ne fourniſſent pas tant d'efforts ſuperflus qui ont eu ce fameux problême pour objet? Quand je parle d'efforts ſuperflus, je ſuis bien éloigné de penſer aux ridicules tentatives de ces hommes à qui l'on ne ſçauroit accorder le titre de Géometre ſans l'avilir & le proſtituer, mais un grand nombre de génies ſupérieurs,

les *Archimede*, les *Appollonius*, les *Huygens*, les *Gregori*, les *Wallis*, &c. ſans parler de tant d'autres plus modernes, qui, après des peines inutiles, ſe ſont vû réduits à perfectionner ſeulement la méthode d'approximation : tous ces génies, dis-je, ſemblent fournir une preuve de cette impoſſibilité qui approche beaucoup de la démonſtration. Au reſte ceci ne regarde que la quadrature définie du cercle ; c'eſt une vérité aujourd'hui reconnue, que l'indéfinie eſt impoſſible, comme l'illuſtre M. *Newton* l'a démontré dans ſes principes ; il y fait voir que non-ſeulement le cercle, mais qu'aucune courbe rentrant en elle-même, comme le cercle, l'ellipſe, &c. n'étoit ſuſceptible de quadrature indéfinie générale, non plus que de rectification, car l'équation qui exprimeroit indéfiniment cette aire, devroit être d'un degré infini. La maniere dont *Newton* établit cette vérité eſt particuliere, j'en donnerai une autre plus bas.

Après *Newton* je trouve dans les Mém. de l'Acad. avant 1699, un écrit de M. *Rolle*, cité comme ayant démontré la même chose. M. *Saurin* l'a fait encore dans les Mém. de 1271, en voici une démonstration très-simple.

Que l'aire indéfinie du cercle ou le segment correspondant à une abcisse quelconque x ou CP (*fig.* 18) soit quarré, & qu'il soit exprimé par X, qui est une fonction quelconque de x, c'est-à-dire une expression formée de x & de ses puissances combinées, comme l'on voudra, avec des coefficiens constans; puisque cette fonction est d'un degré déterminé, que l'exposant de la plus haute puissance de x soit le nombre fini n, il est évident qu'on aura en équation finie le rapport des secteurs ACB, BCE, sçavoir en ôtant du segment AP, le triangle CBP & l'ajoutant à BPE. Le rapport des arcs AB, BE quelconques donné, on aura conséquemment par équation finie celui de

CP, *CE*, ou *CP*, *PE*; c'eſt-à-dire qu'on pourra indéfiniment diviſer la circonférence du cercle en deux parties en raiſon quelconque, ſans avoir à réſoudre qu'une équation d'un degré déterminé *n*; mais la théorie des ſections angulaires nous apprend que cela eſt impoſſible. Car la raiſon propoſée entre les arcs *AB*, *AE* étant exprimée par deux nombres premiers entr'eux & plus grands que *n*, l'équation qui en réſultera ſera néceſſairement d'un degré plus élevé que *n*; & ſi ce rapport eſt irrationnel, il faudra néceſſairement une équation d'un degré infini. Quelque ſoit le nombre *n*, il ne peut donc être fini & déterminé, puiſqu'il doit répondre à tous les cas imaginables des ſections angulaires, & qu'il y en a une infinité qui conduiſent à des équations infinies.



CHAPITRE IV.

Des découvertes faites sur la mesure du Cercle à l'aide des nouveaux calculs, où l'on fait par occasion l'histoire de la naissance du calcul intégral.

I. LES découvertes qu'on vient de voir sur la mesure du cercle suffiroient déja pour donner une grande idée de la sagacité des Géometres qui les ont produites ; mais sans les déprimer en aucune maniere, nous osons dire qu'elles ne sont encore qu'une petite partie de ce que la Géométrie a fait à cet égard. C'est proprement aux calculs modernes que nous sommes redevables des grandes lumieres sur ce sujet ; ce sont les *Wallis*, les *Newton*, & quelques illustres analystes, dignes successeurs de ces excellens génies, qui lui ont donné la derniere perfection dont il paroît

ſuſceptible. L'ordre des progrès de ces découvertes nous engage à développer la naiſſance du calcul intégral; nous en avons ſaiſi l'occaſion avec d'autant plus d'empreſſement que c'eſt le principal endroit par où nous avons eſpéré de rendre cet ouvrage intéreſſant aux Géometres.

II. Les Géometres ſçavent que l'objet de la Géométrie de l'infini eſt de trouver le rapport de la ſomme des élémens infinis en nombre qui croiſſent ou décroiſſent ſuivant un certaine loi & dont une figure eſt compoſée, avec la ſomme des élémens égaux entre eux, & au plus grand, qui compoſent la figure uniforme de même baſe & de même hauteur. On n'eut pas beaucoup de peine à déterminer ce rapport, quand ces élémens ſuivirent une loi ſimple, telle que celle des termes d'une progreſſion arithmétique, ou de leurs puiſſances. *Fermat*, *Deſcartes* & *Roberval* s'apperçurent même avant *Cavalleri*, de la formule générale qui exprime ce

rapport : *Cavalleri* s'y éleva auſſi bientôt après de lui-même dans ſes *Exercitations*. Les ordonnées étant comme les puiſſances m de l'abciſſe, ſoit entieres, ſoit rompues ; $\frac{1}{m+1}$ exprime en général le rapport de la figure à celle de même baſe & même hauteur.

Mais tout cela n'étoit que quelques rayons échappés d'une plus grande lumiere, que *Wallis* dévoila dans ſon *Arithm. infinitorum*, 1657. Cet illuſtre Géometre, en ſuivant le fil de l'analogie, qui fut toujours ſa méthode favorite, ajouta beaucoup à ces découvertes; ce fut, par exemple, l'analogie qui le conduiſit à étendre la formule donnée ci-deſſus, aux cas même où l'ordonnée eſt en raiſon réciproque de l'abciſſe. On lui doit l'ingénieuſe idée de regarder les fractions comme des puiſſances dont les expoſans ſont négatifs : ainſi $\frac{1}{x^m}$ n'eſt autre choſe que x^{-m}. Il fit

enfin à l'égard de cette sorte de Géométrie, qui s'occupe de la mesure des grandeurs, ce que *Descartes* avoit fait sur celle qui recherche les propriétés des lignes courbes; il y appliqua un calcul commode, & par là fournit à la Géométrie quantité d'objets qui lui avoient jusqu'alors échappé.

On tire aisément de la théorie de *Wallis* la mesure de toutes les paraboles, de leurs solides de circonvolution, &c. de toutes les figures enfin dont les élémens exprimés analytiquement ne renferment point de quantité complexe, & de variables sous le signe radical, ou qui peuvent s'en dégager par quelque substitution. Ainsi les figures dont les élémens sont exprimés indéfiniment par $\overline{aa \pm xx}^{0}$, $\overline{aa \pm xx}^{1}$, $\overline{aa \pm xx}^{2}$, &c. se quarreront aisément, car ces expressions sont respectivement 1, $aa \pm xx$, $a^4 \pm 2aaxx \pm x^4$, qui donnent, suivant les principes de ce

calcul, x, $aax \pm \frac{x^3}{3}$, $a^4 x \pm \frac{2aax^3}{3} \pm \frac{x^5}{5}$, pour les aires correspondantes aux abcisses x. Ces conséquences sont tout-à-fait conformes au résultat du calcul intégral appliqué aux mêmes exemp.

Il n'y a de la difficulté que dans les termes où les puissances de $\overline{aa \pm xx}$ sont des nombres rompus, ou lorsqu'elles sont négatives. Ce premier cas est celui de l'expression de l'ordonnée du cercle, qui est $\sqrt{aa - xx}$, ou $\overline{aa - xx}^{\frac{1}{2}}$; x étant l'abcisse prise à compter du centre & le rayon étant a, on ne connoissoit pas encore à cette époque, la maniere de développer cette expression en termes rationels, & c'étoit une condition nécessaire pour y appliquer l'arithmétique de l'infini.

III. *Wallis*, après avoir quarré un grand nombre de figures, se trouva donc arrêté comme on l'avoit été jusqu'alors à la mesure du cercle; il tenta

de ſurmonter cet obſtacle, & au défaut d'une méthode directe, il imagina les *interpolations*, auxquelles il a même donné ſon nom, car on les appelle ſouvent *Walliſiennes*. Cette méthode d'interpolation conſiſte à obſerver dans une ſuite de termes quelconques la loi générale qui regne entr'eux, & à inſérer entre deux termes un ou pluſieurs autres qui s'y conforment. C'eſt ainſi, pour en donner un exemple aſſez ſimple, qu'ayant la progreſſion des nombres triangulaires 0. 1. 3. 6. 10. 15. &c. dans laquelle on voudroit inſérer un terme entre chacun d'eux, on remarqueroit que leur différence étant arithmétiquement croiſſante, il faut donc que cette loi s'obſerve encore entre les termes de la nouvelle progreſſion, c'eſt-à-dire que la différence y croiſſe encore arithmétiquement. Pour y parvenir, ſoient donc x & z les deux termes à inſérer entre 0 & 1, 1 & 3; cela fait, on aura d'abord x, $1 - x$, $z - 1$,

en proportion arithmétique continue; ce qui donnera $x = \frac{3-z}{3}$. La seconde équation viendra de la progression arithmétique discrete qui doit se trouver entre les termes x; $1-x$; $z-1$; $3-z$: ce qui donne $z = \frac{2x+3}{2}$. Or cette valeur de z substituée dans la premiere expression de x, donnera enfin $x = \frac{3}{8}$; on trouvera de même $z = 1\frac{7}{8}$; la suite interpolée sera donc $0. \frac{3}{8}. 1. 1\frac{7}{8}. 3. 4\frac{3}{8}. 6.$ &c. dont les différences sont encore en progression arithmétique, sçavoir $\frac{3}{8}. \frac{5}{8}. \frac{7}{8}.$ &c. c'est là l'esprit des interpolations; & en voilà assez pour mettre les personnes intelligentes en état d'aller plus loin dans l'occasion: appliquons ceci à la mesure du cercle.

On remarquera donc avec *Wallis*,* qu'on a une suite d'expressions, comme $\overline{aa-xx}^0$. $\overline{aa-xx}^1$. $\overline{aa-xx}^2$. $\overline{aa-xx}^3$. &c. dont les exposans des

* *Algebra & arithmetica infinitorum.*

puiſſances, ſçavoir o. 1. 2. 3. &c. croiſſent arithmétiquement. On a auſſi les ſommes des élémens que ces expreſſions déſignent, ou les rapports des figures compoſées de ces élémens à la figure uniforme de même baſe & même hauteur; ils ſont dans le cas particulier ou $x = a$, ils ſont, dis-je, $1. \frac{2}{3}. \frac{8}{15}. \frac{48}{105}.$ reſpectivement, ou, pour obſerver plus facilement la loi qui regne entre ces expreſſions, $1. \frac{2}{3}. \frac{2 \times 4}{3 \times 5}. \frac{2 \times 4 \times 6}{3 \times 5 \times 7}.$ &c. Or qu'on inſere dans la ſuite des expreſſions ci-deſſus $\overline{aa - xx}^{0}$, &c. celle-ci $\overline{aa - xx}^{\frac{1}{2}}$, elle tombera entre le premier & le ſecond, comme celles-ci $\overline{aa - xx}^{\frac{3}{2}}. \overline{aa - xx}^{\frac{5}{2}}$ tomberont encore le ſecond & le troiſiéme, le troiſiéme & le quatriéme, & il ſe formera une progreſſion réguliere de l'expreſſion $\overline{aa - xx}$, dont les expoſans ſeront ſucceſſivement $0. \frac{1}{2}. 1. 1\frac{1}{2}. 2. 2\frac{1}{2}.$ &c. encore arithmétiquement croiſſans, mais

par des différences de moitié des précédentes. Or ne pouvant avoir directement les ſommations de ces termes nouveaux, on les auroit du moins ſi on pouvoit de même inſérer entre les termes $1. \frac{2}{3}. \frac{8}{15}. \frac{48}{105}.$ &c. ſi on pouvoit, dis-je, inſérer de nouveaux termes entre le premier & le ſecond, le ſecond & le troiſiéme, &c. & que ces nouveaux termes, ſuivant l'eſprit des interpolations, ſe conformaſſent exactement à la loi qui régne dans cette progreſſion, de même que leurs correſpondans $\overline{aa - xx}^{\frac{1}{2}}$. &c. ſe conforment à la loi de la progreſſion où on les a inſérées. Le problême de la quadrature du cercle enviſagé de cette maniere, ſe réduit donc à interpoler entre 1 & $\frac{2}{3}$ le terme qui convient à la progreſſion $1. \frac{2}{3}. \frac{2 \times 4}{3 \times 5}. \frac{2 \times 4 \times 6}{3 \times 5 \times 7}.$ &c.

IV. Il ſeroit long, & beaucoup plus que les limites de cet ouvrage ne me le permettent, de développer

tout le reste de la théorie, toutes les remarques adroites que fait *Wallis* dans cette vûe; il trouve enfin * que ce terme est la suite infinie $\frac{2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times10\times10}{3\times3\times5\times5\times7\times7\times9\times9\times11\times}$ &c. ou, ce qui revient au même, $\frac{2}{3}\times\frac{16}{15}\times\frac{36}{35}\times\frac{64}{63}\times\frac{100}{99}$ &c. à l'infini, ou encore $\frac{8}{9}\times\frac{24}{25}\times\frac{48}{49}\times\frac{80}{81}$, &c. à l'infini. Celle-ci, dans quelque endroit qu'on la termine, donne une valeur plus grande que la vraie; la précédente la donne toujours moindre, d'où l'on peut se former des limites de plus en plus serrés: mais si l'on vouloit employer cette expression à des approximations de l'aire du cercle, *Wallis* en fournit un moyen plus court que le précédent: le cercle est toujours plus grand que cette expression $\frac{2.4.4.6.6.8.8.10.\ldots\ldots z}{3.3.5.5.7.7.9.9\ldots z-1}\sqrt{\frac{z-1}{z}}$, & moindre que $\frac{2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times10\ldots z}{3\times3\times5\times5\times7\times7\times9\times9\ldots z-1}\sqrt{\frac{z}{z+1}}$.

* *Arithm. infinit. prop.* 191.

z exprime ici le dernier terme, ou celui où l'on veut s'arrêter, & il faut qu'il ſoit tel que ſon inférieur correſpondant ſoit moindre de l'unité; ou, ce qui eſt la même choſe, que le nombre des termes ſoit pair. Ces limites ſont démontrées par la maniere dont *Wallis* trouve ſon expreſſion, car il ne la conclut infinie que parce qu'il la trouve de cette forme, d'abord plus grande que $\frac{2 \times 4}{3 \times 3} \sqrt{\frac{3}{4}}$ & moindre que $\frac{2 \times 4}{3 \times 3} \sqrt{\frac{4}{5}}$, & enſuite plus grande que $\frac{2 \times 4 \times 4 \times 6}{3 \times 3 \times 5 \times 5} \sqrt{\frac{5}{6}}$, & moindre que $\frac{2 . 4 . 4 . 6}{3 . 3 . 5 . 5} \sqrt{\frac{6}{7}}$, & ainſi de ſuite à l'infini. Or il ſera aiſé d'aſſigner par là quel nombre de termes il faudroit employer pour arriver à un degré d'exactitude requis. Au reſte ſi quelqu'un doutoit de la vérité de cette expreſſion, je remarquerai en ſa faveur, qu'elle ſe réduit à la ſuite ſa

connue pour le cercle $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ &c. M. *Euler* le démontre dans les Mémoires de Péterſbourg (*a*), dans l'un deſquels ce ſçavant Géometre enſeigne à transformer de différentes manieres les ſuites infinies pour les réduire à la forme qu'on juge la plus avantageuſe ; ceux qui ne ſe rendent qu'à la multitude des preuves, regarderont celle-ci comme une confirmation frappante de la vérité de l'une & de l'autre ſuite.

V. *Wallis* paroît être dans une opinion fort ſemblable à celle de *Gregori* ſur la quadrature du cercle, il panche beaucoup à la regarder comme abſolument impoſſible : les paroles ſuivantes (*b*) contiennent ſon ſentiment à ce ſujet ; elles ſont remarquables. *Je ſuis fort porté à croire*, dit-il, *ce que j'ai ſoupçonné dès le commencement, que le rapport* (du cercle à une figure rectili-

(*a*) *T.* 9, *ann.* 1737, *p.* 178.
(*b*) *Alg. c.* 83. *Sch.*

ligne), *eſt d'une nature à ne pouvoir être déſignée par aucune expreſſion encore reçue, pas même par des nombres ſourds, de ſorte qu'il ſerait peut-être néceſſaire d'introduire quelque nouvelle maniere d'expreſſion autre que les nombres rationaux & ſourds.* Une des raiſons qui déterminoit *Wallis* à cette maniere de penſer, étoit la remarque qu'il faiſoit, que la Géométrie connoît dès long-tems une infinité de grandeurs abſolument irréductibles à des nombres rationaux. L'ordre & l'analogie ne conduiſent-elles pas à penſer en conſéquence qu'il peut y en avoir d'autres qui ſont à l'égard des nombres ſourds eux-mêmes, ce que ceux-ci ſont à l'égard des premiers? J'ajouterai que la Géométrie ne ſe borne pas à ce ſeul exemple; il y a des ordres entiers de problêmes abſolument irréductibles à d'autres inférieurs: la rectification de l'ellipſe & de l'hyperbole paroît être de

cette nature, comparée à la quadrature de ces courbes ; & celles-ci le sont probablement de même, comparée à quelque figure rectiligne que l'on voudra, soit rationnelle, soit irrationnelle au quarré de leur diametre. Dans ce cas il est aussi chimérique de chercher la quadrature du cercle & de l'hyperbole autrement que par approximation, que de prétendre assigner exactement la racine d'un nombre qui n'est pas quarré.

VI. La découverte qu'on vient d'exposer fut bientôt suivie d'une autre qui ne lui cede point en beauté ; elle est dûe à Milord *Brouncker*. Consulté par *Wallis*, lorsqu'il travailloit à interpoler sa suite $1.\frac{2}{3}.\frac{8}{15}.$ &c. consulté, dis-je, de quelle maniere il croiroit pouvoir y parvenir, il s'y appliqua ; & pendant que *Wallis* rencontroit, guidé par son analyse, l'expression qu'on a déja fait connoître, il trouva de son

côté la suivante. C'est l'unité divisée par

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\&c.}}}}$$

La nature de cet expression est aisée à appercevoir ; la voici cependant plus développée pour ceux à qui elle ne seroit pas assez évidente : c'est une fraction qui differe des autres en ce que dans celles-ci le dénominateur est un nombre entier fini & terminé ; mais celle que donne Milord *Brouncker* a pour dénominateur un nombre entier plus une fraction, dont le dénominateur est lui-même composé de la même maniere, & ainsi à l'infini. Ici le dénominateur est toujours 2, & les numérateurs sont successivement les quarrés des nombres impairs 1. 3. 5. 7. &c. Cette suite infiniment prolongée, exprime le rapport du quarré du

diametre au cercle, en faisant le diametre égal à l'unité; mais lorsqu'on la terminera, on aura alternativement des limites par excès & par défaut : ainsi $1 + \frac{1}{2}$ est trop grand, $1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2}}$ est trop petit, &c. Au reste ces limites seront beaucoup plus resserrées si l'on fait toujours le dernier dénominateur égal à la racine de son numérateur augmenté de 2, on aura alors alternativement $1 + \frac{1}{3}$. $1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{5}}$ $1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{7}}}$, dont la premiere est encore plus grande que la vérité, la seconde moindre, la troisiéme plus grande, & ainsi à l'infini. Une invention si remarquable méritoit d'être confirmée par une démonstration; M. *Wallis* en a donné une à la fin de son Arithmétique des infinis : mais on ne connoît point l'analyse qui y con-

duisit Mylord *Brouncker*, & on doit regretter, avec M. *Euler* (*a*), qu'elle n'ait jamais été communiquée.

VII. Les fractions de cette forme ont plusieurs propriétés remarquables, qui leur ont mérité l'attention spéciale de M. *Euler* : on voit sur ce sujet un sçavant écrit de ce Géometre dans les Mémoires de Petersbourg (*b*). Parmi plusieurs usages auxquels il les emploie, il y en a un qui appartient à l'objet présent. Il s'en est servi pour résoudre ce problême : *une fraction exprimée par un grand nombre de chiffres étant donnée, par exemple, la raison de la circonférence au diametre de* 3, 14159. 26535, *&c. à* 1, 00000, 00000, *&c. il s'agit de trouver toutes les fractions en moindres termes, qui approchent de si près de la vérité qu'il soit impossible d'en approcher davantage sans en employer de plus grandes.* On

(*a*) Mémoires de Petersbourg, t. 9. p. 102.
(*b*) *Ibidem*. p. 98.

veut

veut, par exemple, trouver quelle est la fraction, dont le numérateur ne passant pas 10, ou 100, ou 1000, différera le moins qu'il est possible de la vérité; il faut pour cela réduire ce rapport en fraction continue; c'est ce qu'on fera en divisant 3. 1415 &c. par 10000 &c. le quotient est 3, ensuite on divisera 10000, par le reste, 1415, &c. & l'on trouve 7; on continuera de même en divisant 1415 &c. par le reste de celle-ci, & on aura 15, & ainsi de suite; la fraction continue sera donc $3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{192}}}}$, &c.

ce qui donne la solution du problême, car $\frac{3}{1}$ est moindre qu'il ne faut; les deux premiers termes sont $\frac{22}{7}$, la proportion d'*Archimede*, qui de toutes celles qui ne passent pas 100 est la plus exacte par excès; les trois premiers termes donnent la raison trop petite de

333, 106; en prenant un terme de plus on a celle de *Metius*, qui eſt excédente 355. 113 : l'une & l'autre eſt la plus exacte (l'une par défaut, l'autre par excès), de toutes celles qui n'ont pas un numérateur plus grand que 1000; celle de *Metius* ſur-tout approche extrêmement de la vérité. On en voit la raiſon dans la fraction continue, c'eſt que le terme ſuivant $\frac{1}{192}$ eſt très-petit; on trouve enfin de ſuite 103993 : 33102. 104348 : 33215. 208341 : 66317. 521030 : 195849. &c. qui ont des propriétés ſemblables; & que M. *Euler* enſeigne à trouver par un moyen fort ſimple. M. *Wallis*, qui a réſolu ce problême par une méthode beaucoup plus laborieuſe, a donné une table de ces fractions pouſſée aſſez loin. *

VIII. C'eſt une remarque digne d'attention dans l'hiſtoire des Sciences,

* *Algebra*, c. 8.

que les découvertes les plus heureuſes ont preſque toujours été précédées de quelques légeres ébauches, qui en ont été l'occaſion & le motif. Cela ſe vérifie ici : les idées de *Wallis* ſur les interpolations, miſes en œuvres plus heureuſement par *Newton*, ont été le principe de preſque toutes les découvertes de la nouvelle Géométrie. Les ſuites infinies de la forme dont nous les employons, le développement des puiſſances, ou le fameux binome de *Newton*, & un grand nombre de nouvelles expreſſions de l'aire du cercle, furent le premier fruit des tentatives qu'il fit pour ſurmonter l'obſtacle qui avoit arrêté *Wallis*. *Newton* nous raconte lui-même le progrès de ces découvertes, dans ſa ſeconde lettre *, écrite à Oldembourg en 1676. Nous ne ſçaurions ſuivre un guide plus ſûr.

* *Commercium Epiſt. de anal. promotâ, p. 67. Neutoni opuſcula, t. 1, p. 328.*

Wallis, comme on l'a vû, avoit réduit la quadrature du cercle à déterminer la ſommation du terme $\sqrt{1 - xx}$, dans les principes de l'arithmétique des infinis : ſommation qui dans le cas défini du quart de cercle entier, ou de $x = 1$, eſt le terme à interpoler entre les deux premiers de la ſuite hypergéométrique $1. \frac{2}{3}. \frac{8}{15}.$ &c. *Wallis* avoit bien remarqué * que ſi dans la ſuite $x. x - \frac{x^3}{3}. x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}.$ &c. on pouvoit trouver le terme moyen entre les deux premiers, on auroit quelque choſe de plus parfait que la quadrature qu'on a fait connoître; car on auroit eu alors la meſure indéfinie du ſegment correſpondant à l'abciſſe x : mais il ne put y parvenir, quoiqu'il ſe fut aſſez bien mis ſur la voie; la réuſſite en étoit réſervée aux premiers eſſais de *Newton*.

* *Ibid*, c. 82.

Pour ſuivre plus aiſément la marche de ce puiſſant génie dans cette recherche, il nous faut expoſer plus diſtinctement les expreſſions qu'on a données ci-deſſus ; on a donc

$$x - \frac{0}{3}x^3$$
$$x - \frac{1}{3}x^3$$
$$x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$$
$$x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{x^7}{7}$$
$$x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{5}x^5 - \frac{4}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9.$$

Ce nombre ſuffira pour l'objet qu'on ſe propoſe.

Newton remarquoit donc d'abord que toutes ces expreſſions commençoient par x, que tous leurs termes étoient alternativement poſitifs & négatifs ; que les puiſſances de x alloient toujours en croiſſant, comme x. x^3. x^5 &c. Il ne s'agiſſoit que de trouver les coefficiens ; pour cela il obſervoit encore que les coefficiens des termes qui ſont dans le ſecond rang perpendiculaire, ſont ſucceſſivement $\frac{0}{3}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{2}{3}$ &c. ainſi l'expreſſion

à insérer entre $x - \frac{1}{3}x^3$ & x ou $x - \frac{0}{3}x^3$, doit avoir un coefficient moyen arithmétique entre $\frac{0}{3}$ & $\frac{1}{3}$, sçavoir $\frac{\frac{1}{2}}{3}$. Les deux premiers termes seront donc $x - \frac{\frac{1}{2}}{3}x^3$; & comme les dénominateurs croissent arithmétiquement & sont 3. 5. 7. &c. tout est fait à cet égard, il ne reste plus que les numérateurs de ces coefficiens. C'est aussi précisément le nœud de la difficulté, & il y eut bien de la sagacité à remarquer, comme fit *Newton*, que m étant le numérateur du coefficient du second terme, ceux des suivans étoient successivement $\frac{m.\,m-1}{1.\,2.}$. $\frac{m.\,m-1.\,m-2}{1.\,2.\,3.}$ &c. c'est ce qu'il est aisé d'éprouver sur les termes où ces coefficiens sont connus.

Appliquons à présent cette derniere remarque à l'expression $x - \frac{\frac{1}{2}}{3}x^3$, &c. où le numérateur du second terme est

$\frac{1}{2}$. On trouve, en mettant cette valeur en la place de *m* dans les formules ci-dessus, pour les suivans $-\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$. $-\frac{5}{128}$. &c. ainsi ayant égard à la composition des signes, on trouve pour le troisiéme terme $-\frac{\frac{1}{8}}{5}x^5$ ou bien $-\frac{1}{40}x^5$; pour le quatriéme $-\frac{\frac{1}{16}}{7}x^7$, ou $-\frac{1}{112}x^7$ &c. cette expression sera enfin $x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 - \frac{5}{1152}x^9$ &c. ou, afin de mieux voir la loi de sa continuation, $x - \frac{1}{2.3.}x^3 - \frac{1}{2.4.5.}x^5 - \frac{1.\ 3.}{2.4.6.7.}x^7 - \frac{1.\ 3.\ 5.}{2.4.6.8.9.}x^9$ &c. la premiere suite qui ait été donnée de l'aire du cercle. Si le détail où l'on vient d'entrer a déplu à quelque lecteur, on le prie de faire attention que la nature de cette découverte, l'une des plus intéressantes de la Géometrie, le demandoit. La vraie histoire des Sciences consiste à développer autant qu'il se peut le procédé même

de l'invention, & cela eſt d'autant plus néceſſaire que ce procédé eſt ordinairement différent de celui que l'on expoſe dans la ſuite.

IX. *Newton* ne tarda pas à découvrir un moyen plus court & plus ſimple de parvenir à la même vérité : il s'apperçut bientôt après qu'il ne s'agiſſoit que de développer le terme $\sqrt{1 - xx}$, en expreſſions rationnelles ; il le fit d'abord en interpolant, par une méthode ſemblable, le ſecond terme * dans la ſuite :

1

$*$

$1 - xx.$

$1 - 2xx + x^4$

ici il ne faut qu'omettre les diviſeurs 3. 5. 7. de la précédente, & diminuer chaque puiſſance de x d'une dimenſion, on a alors $1 - \frac{xx}{2} - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6$, &c. Cette remarque mit *Newton* en poſſeſſion de ſa formule pour élever

le binome $a + b$ à une puiſſance quelconque m, formule qui ſert encore à extraire les racines, en faiſant m un nombre rompu. Il s'apperçut enfin que pour trouver la valeur rationnelle de $\sqrt{1 - xx}$, il n'y avoit qu'à en extraire la racine quarrée par l'opération ordinaire : on trouvera ici cette ſeule différence, que l'opération ne ſe terminera pas, de même que dans les extractions de racines de nombres qui ne ſont pas des puiſſances exactes. Par cette méthode, la plus ſimple de toutes, du moins dans ce cas particulier, on trouve $\sqrt{1 - xx}$ comme ci-devant égal à $1 - \frac{xx}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16}$, &c. ce qui ſuivant la méthode de *Wallis*, donne pour l'aire du cercle la même ſuite $x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{40} x^5 - \frac{x^7}{112}$, &c.

Ces trois méthodes différentes, & qui conduiſent préciſément à la même valeur de l'aire du cercle, doivent ſe

ſervir de confirmation mutuelle auprès de ceux pour qui cette analyſe feroit trop relevée : elles n'ont pas beſoin de ce ſecours auprès des Géometres un peu verſés, pour qui elles auront chacune en particulier aſſez d'évidence. Je remets à tirer plus bas quelques conſéquences & quelques détails en faveur de ceux que ces vérités générales ne ſatisferoient pas.

X. L'invention des calculs différentiel & intégral, ou, comme on les nomme en Angleterre, des fluxions & fluentes, ſuccéda bientôt à ces premieres découvertes ſur la meſure du cercle, & en fournit de nouvelles ; l'illuſtre *Newton* en étoit déja poſſeſſeur en 1668. *Mercator* publioit alors ſa *Logarithmotechnie*, ouvrage dans lequel, comme on ſçait, il quarroit l'hyperbole par une ſuite infinie, & tiroit de là la conſtruction des logarithmes. C'eſt une découverte qui étoit familiere dès les années 1665, 1666, à *Newton*, in-

connu encore & ne cherchant point à ſe faire connoître ; car il raconte qu'il s'amuſa alors à calculer les logarithmes par la quadrature des aires hyperboliques. *Pudet dicere*, écrivoit-il à *Collins*, en 1676, *ad quot figurarum loca computationes has, otioſus eo tempore perduxi. Nam tunc ſane nimis delectabar inventis hiſce.*

La publication de l'ouvrage de *Mercator*, qui auroit excité un autre à divulguer tant de découvertes, faillit au contraire à déterminer *Newton* à ſupprimer toutes les ſiennes ; il ſe perſuada que *Mercator*, après avoir trouvé la quadrature de l'hyperbole ne tarderoit pas à rencontrer celle du cercle ; ou que ſi elle lui échappoit, d'autres étendroient ſa découverte & l'appliqueroient à cette courbe. Il n'y avoit en effet qu'un pas à faire, & un pas en apparence peu difficile ; mais ce n'eſt pas là le ſeul exemple dans l'hiſtoire des ſciences, où l'on voit une découverte

manquée par celui-là même qui l'avoit amenée à sa maturité. *Newton* enfin ne croyoit pas être encore d'un âge assez mur pour écrire, trait admirable & unique de modestie dans un génie si superieur ! qu'il devroit être gravé dans l'esprit de ces hommes, dont les ouvrages prématurés annoncent la téméraire entreprise d'instruire le public de ce dont ils ont à peine une légere teinture !

Ce ne fut que sur les instances de *Barrow*, que *Newton* se détermina à communiquer ces découvertes analytiques. *Barrow* étoit venu à connoître sur ces entrefaites cet homme rare, & il en avoit senti tout le mérite, car il étoit lui-même homme de génie & grand Géometre : *Neuton* lui remit, aussi-tôt après la publication de la *Logarithmotechnie* de *Mercator*, un écrit intitulé, *Analysis per æquationes numero terminorum infinitas*, qui fut envoyé à *Collins*, le *Mersenne* de l'An-

gleterre. On trouve dans ce traité, imprimé dans le *Commercium epistolicum*, sur la copie de *Collins*, collationnée au manuscrit de *Newton*; on y trouve, dis-je, presque tout le calcul moderne; les quadratures & les rectifications des courbes, soit de celles qui en sont susceptibles en termes finis, soit de celles qui ne les admettent qu'en suite infinie; la formation de ces suites, leur retour, l'extraction des racines, la résolution des équations de tous les degrés; le principe enfin du calcul des fluxions & fluentes, qui y est clairement énoncé & déduit du mouvement (*page* 14 *du Comm. Epist.*). Une exposition plus détaillée de toutes ces découvertes appartient à une histoire particuliere de la Géométrie. On se bornera ici à ce qui regarde spécialement la mesure du cercle, que *Newton* perfectionne dans cet écrit de bien des manieres. Il y enseigne à trouver indéfiniment la grandeur de l'arc, soit

par la connoiſſance du ſinus verſe, c'eſt-à-dire de l'abciſſe, commençant à l'extrémité du diametre comme *AD*, ſoit par celle du ſinus droit ou de l'abciſſe (*fig.* 19), prenant ſon origine au centre. Il en fait de même de l'aire; ainſi ſuppoſant le rayon du cercle égal à 1, l'aire du ſegment *CDEB*, qui répondra à l'abciſſe x ou *CD*, eſt égale à l'expreſſion

$$x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{112}, \text{ \&c.}$$

& l'arc *DE* eſt égal à la ſuivante,

$$x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112}, \text{ \&c.}$$

Au reſte les coefficiens $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{40}$, $\frac{1}{112}$ ſont les produits ſucceſſifs $\frac{1}{2.\ 3.}$, $\frac{1}{2.\ 4.\ 5.}$, $\frac{1.\ 3.}{2.\ 4.\ 6.\ 7.}$, &c. ce qui donne le moyen de continuer la progreſſion. Mais ſi l'on veut la grandeur du ſegment *ADE*, nommant $AD = x$, & le rayon 1, ſa valeur eſt

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} \times \frac{4}{3}x - \frac{x^2}{2.\ 5.} - \frac{x^3}{4.7.2.} - \frac{3x^4}{4.6.9.4.}$$

$$-\frac{3.5x^5}{4.6.8.11.8.}-\frac{3.5.7.x^6}{4.6.8.10.13.16.},$$

dont la progreſſion eſt aiſée à remarquer, au dernier facteur du diviſeur près, qui dans chaque terme, à commencer du troiſiéme, va toujours en doublant; la même ſuppoſition faite, la valeur de l'arc *AE* eſt

$$\sqrt{2x}\times 1+\frac{x}{6}+\frac{3}{40}x^2,+\frac{5}{112}x^3+\frac{35}{1152}x^4, \text{\&c.}$$

On peut enfin, *vice versâ*, trouver la grandeur du ſinus ſoit verſe, ſoit droit, l'arc ou l'aire étant donnée par la méthode du retour des ſuites. *Newton* en donne quelques exemples: l'arc *AE* étant z, le rayon 1, le ſinus verſe *DA* eſt égal à la ſuite

$$\frac{zz}{2}-\frac{z^4}{2\times3\times4}+\frac{z^6}{2\times3\times4\times5\times6}-\frac{z^8}{2\times3\times4\times5\times6\times7\times8}, \text{ ou } \frac{zz}{2}-\frac{z^4}{24}+\frac{z^6}{720}-\frac{z^8}{40320}+\text{\&c.}$$

& le ſinus *DE* à celle-ci, $z-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{120}$

$-\frac{z^7}{5040}+\frac{z^9}{362880}-$ &c. Il eſt aiſé d'appercevoir que les diviſeurs numériques ſont ici les produits ſucceſſifs 2×3; $2\times3\times4\times5$; $2\times3\times4\times5\times6\times7$, &c.

XI. Les découvertes de *Newton* ayant été publiées & communiquées à divers Géometres par l'entremiſe de *Collins*, celui qui ſe hâta le plus d'y ajouter, & qui le fit le plus heureuſement, fut M. *Jacques Gregori*; c'étoit un Géometre de grande eſpérance, un homme à ſeconder *Newton* ſi la mort ne l'eût enlevé à la fleur de ſon âge. Il l'avoit précédé dans l'invention du téleſcope catadioptrique, & il marcha de près ſur ſes traces dans quelques-unes de ſes découvertes analytiques.

A peu près dans le même temps que *Newton* ſe diſpoſoit à répondre aux inſtances de *Barrow*, *Gregori* publioit dans ſes *Exercitationes* une ſuite infinie pour exprimer l'aire du cercle : cet

ouvrage parut peu après celui de *Mercator*. La ſuite de *Gregori* eſt celle-ci ; $4rr$ diviſé par $2d - \frac{e}{3} - \frac{e^2}{90d} - \frac{e^3}{756d^2} - \frac{23}{113400\,d^3} - \frac{260\,e^5}{7484400\,d^4}$, &c. le rayon eſt deſigné dans cette expreſſion par r ; d eſt la moitié du côté du quarré inſcrit, & e la différence du rayon avec ce côté. Cette ſuite converge aſſez rapidement, elle n'a que le deſavantage de ſe ſervir de termes un peu compliqués, & de ne pas être indéfinie.

Gregori fut bientôt informé par *Collins* de la découverte de *Newton* ſur l'aire des courbes, & quelques-unes de ſes ſuites lui furent communiquées. La préoccupation où il étoit ſur la ſienne & ſur ſa méthode lui firent d'abord croire qu'elles devoient avoir la même origine, ce qui contribua à les lui rendre moins remarquables ; voyant même qu'elles ne ſe rapportoient point aux ſiennes, il conçut quelques doutes ſur

leur légitimité : mais ce ne fut qu'un ſentiment paſſager, auquel ſuccéda bientôt celui de la juſtice que méritoient les inventions de *Newton* ; non ſeulement il s'aſſura de leur vérité, mais à l'aide d'une profonde méditation, il parvint à découvrir la méthode elle-même que *Newton* s'étoit formée. On lui rend ce témoignage dans pluſieurs endroits du *Commercium epiſt.* * Il renvoya bientôt après à *Collins* la ſuite pour exprimer l'arc par la tangente, ſçavoir, $a = t - \frac{t^3}{3rr} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6}$ &c. où t eſt la tangente, r le rayon, & a l'arc cherché. Cette ſuite, l'une des plus élégantes par ſa ſimplicité & la régularité de la loi de ſa progreſſion, eſt, tout compenſé, celle qui maniée avec adreſſe fournit les approximations les plus commodes. *Grégori* donna auſſi des ſuites pour exprimer la tangente & la ſecante, l'arc étant connu, & même

* Pages 29, 48, 71, éd. de 1714, *in*-4°.

pour tirer immédiatement de l'arc donné ses secante & tangente artificielles, c'est-à-dire leurs logarithmes. La rectification de l'ellipse & de l'hyperbole en suites infinies, que *Collins* ne lui avoit point communiquée, étoit aussi de ce nombre. Je n'ai fait mention de ces dernieres découvertes, étrangeres à mon sujet, que pour justifier les éloges que j'ai donné à ce grand Géometre: je reprens le fil de mon histoire.

XII. On doit reconnoître, & c'est une vérité dont le *Commercium epistolicum* fournit des preuves, que toutes ces nouveautés brillantes d'analyse prirent naissance en Angleterre, & que les Géometres du continent y eurent alors peu de part; ce fut seulement quelques années après (en 1674) que M. *Leibnitz* trouva sa suite pour le cercle, sçavoir, le diametre étant l'unité, $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$, &c. On ne peut disconvenir que cette suite soit la

même au fond que celle de *Gregori*, qui trouvoit (faiſant le rayon = 1 & la tangente auſſi = 1) la même expreſſion pour le demi-quart de cercle, ou l'arc de 45°; cependant pluſieurs circonſtances doivent écarter l'imputation de plagiat intentée à ce ſujet contre *Leibnitz*.

1°. Cette découverte eſt chez lui une ſuite de la méthode de transformation qu'il avoit imaginée pour débarraſſer l'expreſſion de l'ordonnée du cercle de l'irrationalité qui l'accompagne, afin d'y appliquer le développement de *Mercator*. Cette méthode, expoſée au long dans le cours d'*Ozanam*, avoit été communiquée aux Géometres vers l'an 1674. *Leibnitz* s'eſt plaint pluſieurs fois du ſilence de cet écrivain ſur l'auteur de cette ingénieuſe invention, dont on ſeroit tenté de lui faire honneur, ſi l'on ne ſçavoit que ce Mathématicien étoit d'une claſſe bien inférieure à celle

des analystes dont il est question ici.

2°. La bonne foi de *Leibnitz* paroît évidemment dans les Lettres qu'il écrivoit sur cela à *Oldenbourg*, en 1674, & dans lesquelles il lui faisoit part de sa découverte avec une sorte de transport *, Croira-t-on qu'il eût été si peu fin que de tenir un pareil langage s'il l'avoit reçûe de *Collins* ou *Oldembourg*, comme on l'a prétendu faire soupçonner? Les réponses de ce Secrétaire de la Société Royale de Londres le lui auroient bien rappellé; il se contente au contraire de l'informer, comme pour la premiere fois, des progrès que *Newton* & *Gregori* avoient fait dans l'analyse. Ces raisons me font penser qu'il y auroit de l'injustice à dépouiller *Leibnitz* de cette découverte, comme ont voulu faire quelques partisans trop zélés de la gloire de la nation Angloise. *Newton* plus équitable, & sçachant que ce qui

* *Comm. epist. p. 37, ed. in-4°.*

s'étoit présenté à *Gregori* pouvoit aussi avoir été trouvé par *Leibnitz* au-delà des mers, ne fait point de difficulté de l'appeller la suite de *Leibnitz*. * *Leibnitz* avoit eu dessein de la publier dans un traité particulier qu'il se proposoit d'intituler du nom de *Quadratura arithmetica*; il est souvent parlé de ce projet dans le *Commercium epistolicum* : sans doute lorsqu'il fut en possession de plus grandes découvertes, celle-ci ne lui parut plus assez remarquable pour en faire la matiere d'un ouvrage. Il en donna le précis dans les actes de Leipsick, année 1682, sous le titre de *Vera proportio circuli ad quad. circumscriptum.*

XIII. Les raisons que je viens de présenter pour disculper *Leibnitz* de l'accusation de plagiat intentée contre lui, recevront un nouveau poids de la remarque suivante; c'est que la découverte dont il est ici question semble

* *Comm. epist. p.* 79, & ailleurs.

n'avoir pas été d'une difficulté ſi ſupérieure, qu'elle ne ſe ſoit préſentée en même tems à divers Géometres. Elle n'échappa pas à M. *de Lagny*, ſi nous l'en croyons lui-même; il nous aſſure, dans les Mémoires de l'Academie de 1719, qu'il avoit trouvé dès l'année 1682 la même ſuite, nullement informé encore de ce que *Gregori* ni *Leibnitz* avoient fait à ce ſujet; & l'on n'en ſera point ſurpris, car cette année-là eſt la premiere où fut publiée la ſuite en queſtion dans les actes de Leipſick: M. *de Lagny*, alors à Toulouſe, ne pouvoit que difficilement avoir connoiſſance, ſoit des lettres de *Leibnitz* & *Newton*, toujours reſtées entre des mains privées, ſoit de ces Journaux que l'Allemagne voyoit tout nouvellement paroître. Ajoutons à cela que la méthode de M. *de Lagny*, de même que celle de *Leibnitz*, dont elle differe cependant, donne du poids à ce qu'il dit, car elle paroît avoir été imaginée

dans les mêmes vûes, je veux dire pour éviter l'irrationalité, qui ſeule empêchoit d'appliquer au cercle la méthode de diviſion de *Mercator*, la ſeule encore connue pour quarrer les figures. Si M. *de Lagny* a pu faire cette découverte, ne ſera-t-il pas fort probable que M. *Leibnitz*, qui a donné des preuves d'un génie fort ſupérieur, l'ait fait dans les mêmes circonſtances ?

XIV. Depuis que le calcul intégral a fait des progrès parmi les Géometres, rien n'eſt plus connu que les différentes expreſſions qu'on vient de donner du cercle & de ſes parties : il ne faut qu'être initié dans ce calcul pour les trouver. On ne s'attachera donc point à les développer ici par ſon moyen, ceux qui l'ignorent peuvent conſulter les ouvrages qui en ont traité : voici ſeulement quelques expreſſions du cercle, qu'on n'avoit pas pû faire connoître dans le cours de la narration précédente.

Si la corde d'un arc eſt x, le diametre 1, le ſegment eſt égal à

$$\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{4.5} + \frac{3x^7}{4.4.7} + \frac{3.5x^9}{4.4.6.9.}, \&c.$$

Cela eſt aiſé à démontrer, ſoit en le tirant immédiatement de l'expreſſion du petit triangle *ACB* (*fig.* 19), qui eſt $\frac{x^2 dx}{2\sqrt{1-xx}}$, ſoit en le dérivant de la ſuite qui exprime le demi-ſegment *ADE*, la demi-corde *AE* étant $= \frac{1}{2}x$.

On a donné précédemment, d'après MM. *Leibnitz* & *Gregori*, la ſuite $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$, &c. pour l'expreſſion de l'arc de 45°, ou de l'aire du quart de cercle, le rayon étant 1. M. *Newton* a trouvé que cette ſuite, $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} -$ &c. exprimoit auſſi l'arc de 90°. la corde étant l'unité, & le rayon étant conſéquemment $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Voici encore une autre maniere d'exprimer l'aire du cercle. Que le diametre ſoit 1, & la tangente

$t = \frac{1}{2}$, l'aire de tout le cercle ſera la ſomme de ces trois ſuites;

$$t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} \text{ \&c.}$$

$$tt + \frac{t^5}{3} - \frac{t^8}{5} - \frac{t^{11}}{7} + \frac{t^{14}}{9} \text{ \&c.}$$

$$t^4 - \frac{t^{10}}{3} + \frac{t^{16}}{5} \text{ \&c.}$$

Je paſſe à préſent à montrer l'uſage de ces expreſſions, qu'on n'a encore enviſagé que d'une maniere générale.

XV. Il eſt d'abord évident que chacune de ces ſuites fournit un moyen commode pour trouver la grandeur approchée de tout ſegment, de tout ſecteur, de tout arc de cercle, lorſque la valeur de l'indéterminée qui lui convient ſera aſſez petite pour faire converger la ſuite rapidement : je vais m'expliquer par un exemple. Qu'on demande l'aire du ſegment *CDEB* (*fig.* 20), où l'abciſſe n'eſt qu'une petite partie, par exemple, un tiers du rayon,

alors la ſuite qui convient à ce cas, ſçavoir, $x - \frac{1}{2.3} x^3 - \frac{1}{2.4.5} x^5$, &c. ſe réduira à $\frac{1}{3} - \frac{1}{2.3.27.} - \frac{1}{2.4.5.243}$, &c. ou $\frac{1}{3} - \frac{1}{162} - \frac{1}{9720}$, &c. Or il eſt viſible que les deux premiers termes ſeuls donnent la grandeur de ce ſegment à moins d'une 9000ᵉ près. Ainſi le plus ſouvent un très-léger calcul approche extrêmement de la vérité, & dans d'autres cas moins avantageux, celui de 4, 5 ou 6 termes ſuffira. Je ne m'arrête pas davantage à ceci; dans d'autres cas où la ſuite feroit médiocrement convergente, on pourra même éviter la peine de ſommer un nombre de termes médiocre; il y a des méthodes que l'on indiquera, & par leſquelles on convertit une ſuite peu convergente en une autre qui l'eſt beaucoup.

XVI. Lorſque l'on a voulu appliquer ces ſuites à en tirer de grandes

approximations de la valeur entiere du cercle, on a cherché, pour diminuer le travail, les cas les plus avantageux pour les faire converger. Si voulant, par exemple, exprimer l'aire du quart de cercle, on s'étoit contenté de donner à l'abciſſe x la valeur qui lui convient alors, dans la ſuite $x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^7 - \frac{1}{112}x^7$, &c. on auroit eu, puiſqu'elle eſt alors l'unité, on auroit eu, dis-je, $1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{40} - \frac{1}{112} -$ &c. qui eſt en effet la vraie grandeur du quart de cercle. Mais comme cette ſuite converge peu, il faudroit ſommer un grand nombre de termes, peut-être 30 ou 40, pour en tirer une approximation ſeulement en dix décimales; au lieu qu'en faiſant x égal à $\frac{1}{2}$, le travail eſt conſidérablement abrégé; car alors l'arc BE (*fig.* 20) étant le $\frac{1}{3}$ du quart de cercle, ſi de la valeur de $CBED$ on ôte le triangle CDE connu, le reſte, ſçavoir le ſecteur CBE, triplé, ſera le quart de cercle. Or la valeur de

CDEB converge assez rapidement pour la trouver sans beaucoup de peine; car la suite $x - \frac{1}{2.3}x^3 - \frac{x^5}{2.4.5} - \frac{1.3.}{2.4.6.7}x^7$ &c. lorsqu'on fera $x = \frac{1}{2}$, se convertit en $\frac{1}{2} - \frac{1}{2.3.8} - \frac{1}{2.4.5.32} - \frac{1.3}{2.4.6.7.128}$, &c. qui est composée de fractions assez sensiblement décroissantes.

On s'engageroit au reste dans d'étranges calculs, si on entreprenoit de sommer ces fractions à la maniere ordinaire : la méthode des fractions décimales en diminuera considérablement la fatigue.

Cependant cette méthode elle-même ne suffiroit pas, si l'on n'usoit encore de quelque adresse pour s'épargner quantité d'opérations superflues. En effet en calculant chaque terme de la maniere qui se présente d'abord, il faudroit, après avoir trouvé le numé-

rateur & le dénominateur de chaque fraction, il faudroit, dis-je, augmenter le numérateur d'un certain nombre de zéros, & puis diviser par le dénominateur, qui bientôt seroit composé d'une multitude de chiffres. Or on voit aisément combien ce procédé seroit laborieux & incommode, au lieu qu'avec un peu d'attention il se présente un moyen de l'abréger considérablement. Ce moyen consiste à réduire la suite proposée à une autre forme, dans laquelle chaque terme se déduit du précédent, en l'affectant d'un coefficient dont la progression est facile à appercevoir. Ayant, par exemple, nommé le premier terme négatif A, le second est $= \frac{3\,A}{4 \cdot 5 \cdot 4}$, comme il est aisé de l'éprouver en mettant au lieu de A sa valeur; nommant ensuite B ce second terme, le troisiéme $C = \frac{3 \cdot 5\,B}{6 \cdot 7 \cdot 4}$ & le quatriéme $D = \frac{5 \cdot 7\,C}{5 \cdot 9 \cdot 4}$, de maniere que

[library stamp]

la ſuite entiere paroît ſous cette forme :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2.6.4} - \frac{3A}{4.5.4} - \frac{3.5B}{6.7.4} - \frac{5.7C}{8.9.4}$$

$- \frac{7.9D}{10.11.4}$, &c. où il ſuffit de la plus legere inſpection pour la continuer à l'infini.

Suppoſons donc à préſent qu'il s'agiſſe de déterminer en 10 décimales l'aire du quart de cercle comparé au quarré du rayon, nous employerons pour cela la ſuite préparée comme l'on vient de voir, où l'abciſſe x a été faite $= \frac{1}{2}$, afin de trouver le ſegment *BCDE*. J'ai calculé en particulier chaque terme juſqu'à 15 décimales, afin d'être plus aſſuré que la derniere de celles que j'emploie ici eſt exacte. Nous aurons donc d'abord $\frac{1}{2} =$ 0. 50000, 00000, 00. & $\frac{1}{48} =$ 0. 02083, 33333, 33; enſuite multipliant ce nombre par 3, & le diviſant par le produit de 4, 5, 4, ou 80, on a pour quotient 0, 00078, 12499, 99; de même

multipliant celui-ci par 15 & divisant par 168, on trouve le terme $C = 0,00006, 97544, 64$, & ainsi à l'égard des autres ; on arrange enfin tous ces termes affectés du même signe dans une colonne, comme on le voit ici :

$A =$	0. 02083, 33333, 33
$B =$	78, 12499, 99
$C =$	6, 97544, 64
$D =$	84771, 04
$E =$	12137, 67
$F =$	1925, 59
$G =$	327, 94
$H =$	58, 77
$I =$	10, 95
$K =$	2, 10
$L =$	41
$M =$	8
$N =$	1
$O =$	0
	0, 02169, 42612, 52

Otons la somme de ces termes,

002169 &c. de $\frac{1}{2}$, ou 0. 5000 &c. le restant sera 0, 47830, 57387, 48; mais il faut retrancher de là le triangle *CDE*, dont l'aire est égale à $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{4}}$ ou $\frac{1}{8}\sqrt{3} = 0.21650, 63509, 46$. La soustraction faite, on trouve 0. 26179, 93878, 02, pour la valeur du segment *CDEB*, ce qui par conséquent multiplié par 3, donne pour le quart de cercle 0. 78539, 81634, 06, le quarré du rayon étant 1. 00000, 00000, 00. Or cette expression, qui excede un peu la vérité, parce que dans tous les termes négatifs le dernier chiffre est moindre que le véritable, quoique de moins d'une unité; cette expression, dis-je, coincide avec celle de *Ludolph* jusqu'au dixiéme chiffre inclusivement: car la raison du quart de cercle au quarré du rayon est la même que celle de l'arc de 45° au rayon; par conséquent l'arc de 45° est exprimé par le nombre ci-dessus; donc en le quadru-

plant on aura la demi-circonférence comparée au rayon, ou la raiſon de la circonférence entiere au diametre. Or ce nombre multiplié par 4 eſt 3, 14159, 26536, 24, ce qui convient avec les nombres de *Ludolph* juſqu'au onziéme chiffre, qui eſt un peu trop grand dans cette expreſſion, par la raiſon que nous en avons donnée plus haut.

Mais ſi l'on vouloit avoir une expreſſion certainement au-deſſous de la vérité, pour la comparer à la premiere, & être plus aſſuré des vraies limites de la circonférence, on l'auroit aiſément en ſuppoſant les onze derniers termes de la ſuite ci-deſſus augmentés d'une unité; à l'égard des deux premiers, ils approchent ſi près de leur juſte valeur, qu'on peut les regarder comme vrais, & le peu dont ils s'écartent de l'exactitude par défaut, ne ſçauroit contrebalancer l'excès qu'on donne à tous les autres. On aura par ce

moyen la ſomme de tous les termes négatifs moindre que 0, 02169 42612, 63, & par conſéquent ôtée de $\frac{1}{2}$ ou 0. 50000, &c. elle laiſſera un reſte plus grand que la vérité ; la traitant enfin comme la premiere, on trouvera 0, 78539, 81633, 73, qui multipliée par 4, donne pour valeur approchée de la circonférence 3, 14159, 26534, 92, qui ne péche par défaut que dans le onziéme chiffre.

XVII. On manieroit de la même façon la plupart des autres ſuites propoſées plus haut ; mais à conſidérer les moyens d'approximation qu'elles préſentent, il eſt aiſé d'appercevoir qu'elles n'ont pas toutes le même avantage, & que la plupart ſont peu propres à donner ces immenſes approximations de l'aire du cercle qu'on connoît aujourd'hui : auſſi ne s'en eſt-on point ſervi indifféremment ; on a donné la préférence à celle où t étant la tangente, l'arc eſt exprimé

par $t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}$, &c. il ne s'agit pour cela que de donner à t une valeur moindre que l'unité, en la choisissant telle, qu'elle appartienne en même tems à un arc commensurable avec la circonférence entiere. Car il est visible que si l'on supposoit $t = 1$, dans lequel cas l'arc correspondant seroit de 45°, la suite se réduiroit à $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ &c. mais il faudroit une somme immense de ses termes pour en tirer une approximation en dix chiffres; ainsi, quoique remarquable dans la théorie par son élégance, elle ne seroit ici d'aucun usage. Pour l'y rendre propre il faut faire $t = \sqrt{\frac{1}{3}}$, l'arc correspondant sera alors de 30°, ou la douziéme partie de la circonférence, & la suite se transformera en celle-ci : $\sqrt{\frac{1}{3}} \times 1 - \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot} + \frac{1}{9 \cdot 5 \cdot} - \frac{1}{27 \cdot 7 \cdot} + \frac{1}{81 \cdot 9 \cdot}$, où chaque terme est moindre que le tiers du précédent ; on pourroit même la

rendre plus convergente en ajoutant les termes deux à deux, le ſecond avec le troiſiéme, le quatriéme avec le cinquiéme, & diviſant enſuite par 4, ce qui donneroit la quarante-huitiéme partie de la circonférence exprimée de cette maniere : $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{3}} \times 1 - \frac{3}{3.5.9} - \frac{5}{7.9.81} - \frac{7}{11.13.729}$ &c. c'eſt ainſi que quelques Géometres l'ont employée pour en tirer des approximations. Mais en comparant les avantages & les deſavantages de cette expreſſion, on remarquera bientôt que cette préparation ne fait que la rendre moins commode : en effet, dans ces ſortes de calculs on doit bien moins chercher à ſommer un petit nombre de termes qu'à le faire très-commodément, dût-on en employer beaucoup davantage. Auſſi cette raiſon a-t-elle fait donner la préférence à la premiere ſuite, quoiqu'il y faille prendre le double de termes que dans la derniere pour arriver au même degré

d'exactitude, car cela est abondamment compensé par la facilité des opérations. On voit en effet qu'ayant une fois la valeur de $\sqrt{\frac{1}{3}}$, en autant de décimales ou quelque peu plus qu'on en veut employer dans son approximation, il n'y a qu'à diviser cette valeur par 3, & le quotient qui en résulte par 3, & puis le nouveau quotient encore par 3, & ainsi de suite; après quoi reprenant chacun de ces quotiens, à commencer au premier qu'a donné la division de $\sqrt{\frac{1}{3}}$ par 3, le diviser encore par 3, ensuite le second quotient trouvé ci-devant par 5, le suivant par 7, &c. & ainsi jusqu'à ce que dans le nombre de chiffres auquel on s'est fixé, il n'y ait plus que des zéros. Alors prenant la somme de tous les termes positifs & celle de tous les négatifs, ôtant enfin celle-ci de la premiere, le restant est la douziéme partie de la circonférence. Nous ne croyons pas qu'il soit nécessaire

de donner un exemple de ce procédé, qui doit paroître assez clair après ce qu'on vient de dire.

XVIII. Ces moyens d'approximations, incomparablement plus abrégés que ceux des anciens par les polygones inscrits & circonscrits, ont mis les modernes en état de laisser ceux-ci bien loin derriere eux. La proportion de *Ludolph*, si renommée avant la naissance de la nouvelle Géométrie, n'est plus qu'une petite partie de celle dont nous sommes aujourd'hui en possession. Voici par quels degrés elle s'est élevée à l'immense nombre de M. *de Lagni*. *A. Sharp*, Géometre Anglois, en employant la méthode précédente, la poussa jusqu'à 74 chiffres ; il a communiqué le procédé de son travail dans ses *Tables mathématiques*. M. *Machin*, de la Société Royale de Londres, l'a prolongée jusqu'à 100 termes ; j'ignore à la vérité dans quel ouvrage, mais c'est

M. *Euler* qui nous l'apprend (*a*). M. *de Lagni* enfin enchériſſant ſur eux, l'a continuée juſqu'à 127; il a fait plus, il l'a vérifiée en calculant la même ſuite par deux voies différentes (*b*), & elles lui ont donné le même réſultat. Nous ſçavons par là que ſi le diametre eſt l'unité ſuivie de 126 zéros, la circonférence eſt plus grande que le nombre ſuivant; 3, 14159, 26535, 89793, 23846, 26433, 83279, 50288, 41971, 69399, 37510, 58209, 74944, 59230, 78164, 06286, 20899, 86280, 34825, 34211, 70679, 82148, 08651, 32723, 06647, 09384, 46, & qu'elle eſt moindre que ce même nombre augmenté de l'unité.

XIX. Mais quelque commode que ſoit la méthode expliquée dans l'article XVII, du moins ſi nous la comparons au

(*a*) Mém. de Péterſbourg, t. 9.
(*b*) Mém. de l'Acad. 1719.

procédé laborieux des anciens, on ne peut cependant se dissimuler qu'elle n'avoit pas encore atteint sa perfection lors même qu'on en faisoit un si grand usage ; car la suite employée par MM. *Sharp*, *Machin* & *de Lagni*, a un défaut qui en diminue beaucoup le mérite. Ce défaut consiste dans cette immense extraction de racine qui doit servir de préliminaire au calcul, à cause de l'expression irrationnelle $\sqrt{\frac{1}{3}}$, qui multiplie toute la suite. D'un autre côté si l'on emploie celle de 45°, elle ne converge pas sensiblement. Néanmoins il falloit nécessairement opter entre l'une ou l'autre : car ce sont les plus simples de celles qu'on pouvoit employer, toutes les tangentes rationnelles qui ne surpassent pas le rayon, n'appartenant point à des arcs commensurables à la circonférence, & toutes celles qui appartiennent à de petites portions commensurables de cette circonférence étant extrêmement compli-

quées d'irrationalités. M. *Euler* a cherché à donner à cette méthode ce degré de perfection qui lui manquoit, & il y a réussi des deux manieres que je vais exposer.

XX. La premiere a pour objet de délivrer la suite de l'arc par la tangente, de l'irrationalité qui en rend le calcul si incommode ; elle est fondée sur une propriété des tangentes au cercle qui donne cette analogie : *comme la différence du rectangle de deux tangentes avec le quarré du rayon, est à ce quarré, ainsi la somme des tangentes à la tangente de la somme des arcs.* Il en conclut que l'arc de 45°, le seul commensurable à la circonférence, & ayant en même tems une tangente rationnelle, se peut diviser en deux arcs dont les tangentes sont aussi rationnelles ; & comme elles seront chacune moindre que l'unité, elles donneront pour leur arc correspondant deux suites toutes rationnelles & fort convergentes. Il est

bien vrai que l'arc que chacune exprimera, considéré à part, sera incommensurable avec la circonférence, mais cela n'importe en rien, puisque leur somme sera commensurable avec elle. Nommant ainsi la tangente de 45° = 1, & les deux tangentes cherchées $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, on a, suivant le théorême précédent, $1 = \frac{a+b}{ab-1}$, & de là $b = \frac{a+1}{a-1}$, ce qui donne 2 & 3 pour les moindres & les plus simples valeurs de a & b; un de ces deux arcs sera donc

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \frac{1}{9.2^9}, \&c.$$

& le second sera

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9.3^9}, \&c.$$

& conséquemment l'arc entier de 45° sera égal à la somme de ces deux suites.

On pourroit, par le même artifice,

réduire chacune ou celle qu'on voudroit de ces deux ſuites en deux autres qui ſeroient encore plus convergentes. Ainſi l'arc dont la tangente eſt $\frac{1}{2}$, ſe partage de nouveau en deux autres, dont elles ſont $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{7}$; mais cela eſt inutile, & deviendroit même plus nuiſible qu'avantageux : car dans le calcul de la ſeconde ſuite on auroit à diviſer continuellement par 49, ce qui eſt moins facile que deux diviſions par un nombre ſimple. Les deux premieres rempliſſent preſque tout l'objet qu'on peut ſe propoſer : car je remarque, ce qui eſt eſſentiel, que l'invention de chacun de ces termes eſt peu laborieuſe, à quelque nombre de décimales qu'on veuille les pouſſer ; la raiſon en eſt qu'on rencontrera le plus ſouvent des nombres dont les chiffres ſeront ou continuellement les mêmes, comme $\frac{1}{3} = 0.33333$, &c. $\frac{1}{4} = 0.25000$, &c. ou qui reviendront après certaines périodes ; ainſi le ſeul travail du calcul conſiſtera preſque à ajouter

les termes correspondans des deux suites $\frac{1}{3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} - \frac{1}{3^7}$, &c. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5}$, &c. & à les diviser ensuite successivement par 3. 5. 7. 9. 11. &c. il faudra de ces termes environ autant qu'on aura dessein d'employer de chiffres dans l'approximation. Si quelqu'un la vouloit pousser à 150 décimales, il y parviendroit avec beaucoup moins de peine qu'il n'en a coûté à M. *de Lagni* pour le faire jusqu'à 127.

XXI. Le second desavantage, non seulement de la suite $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$, &c. & des autres qui appartiennent au cercle, mais encore de la plûpart de celles qu'on emploie dans la Géométrie moderne, est d'être assez souvent trop peu convergentes. Elles ne sont plus dès lors d'un usage commode, & cet inconvénient les rendroit inutiles dans un grand nombre de cas, si l'on n'étoit parvenu à y remédier. Quelques

Géometres ſe ſont appliqués à donner à la méthode des ſuites cette perfection eſſentielle. Je n'ai point encore pû voir le traité *de Summatione & interpolatione ſerierum* de M. *Stirling*; il doit contenir d'excellentes choſes à cet égard. Ce que j'en vais dire eſt tiré des ſçavans Mémoires de M. *Euler* (*a*), & du livre de M. *Simpſon*, *The doctrine and applications of fluxions, &c.* (*b*).

Soit 1°. la ſuite $t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}$, &c. ou en faiſant $t = \frac{1}{p}$, celle-ci $\frac{1}{p} - \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^5} - \frac{1}{p^7}$, &c. qu'on a vû déſigner l'arc de cercle, dont la tangente eſt t ou $\frac{1}{p}$. Il faut d'abord avoir ajouté un certain nombre de termes du commencement de cette ſuite; plus on en aura, plus exacte ſera l'approximation

(*a*) *Comm. Acad. Petrop. ann.* 1737, *t.* 9, & *t.* 8, *ad ann.* 1736.

(*b*) *Part. II, ſect.* 7.

qu'on tirera de l'expreſſion ſuivante. Nommons, pour abréger, S la ſomme de ces premiers termes, n leur nombre, & $2n - 1 = r$, enfin $1 + pp = m$, on aura alors, ſuivant les principes de M. *Euler*, la ſomme entiere de la ſuite égale à $S + \frac{1}{p^r}\left(\frac{1}{mr}\right.$

$$- \frac{2p^2}{m^2 r^2} + \frac{2^2 \cdot \overline{p^4 - p^2}}{m^3 r^3} - \frac{2^3 \cdot \overline{p^6 - 4p^4 + p^2}}{m^4 r^4}$$

$$\left. + \frac{2^4 \cdot \overline{p^8 - 11p^6 + 11p^4 - p^2}}{m^5 r^5} - \&c. \right)$$

Ainſi l'on réduit la ſommation d'une ſuite qui ne converge preſque pas ſenſiblement à celle d'une autre qui converge fort vîte, & l'on transforme une ſuite qui eſt déja convergente en une autre qui l'eſt en quelque maniere infiniment plus. On abrége donc par là conſidérablement le calcul dans tous les cas. Pour en donner un exemple, je vais choiſir le plus deſavantageux, celui où la tangente étant l'unité, la ſuite eſt $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$, &c. Suivant la

méthode de M. *Euler*, les six premiers termes suffiront pour prévenir une erreur d'une 1000000e; or ces six premiers termes ajoutés ensemble font 0. 744012, & en employant la formule, on a $p = 1$, & $1 + pp = 2$; $2n - 1 = 11$; de maniere qu'on a à ajouter pour complément de cette somme, $\frac{1}{2.11} - \frac{2}{4.121} + 0 + \frac{1}{11^4} + 0 - \frac{8}{11^6}$, ce que deviennent les six premiers termes de la seconde suite multipliés par $\frac{1}{p^r}$, ou 1. Ces termes réduits en fractions décimales, sont 0. 041386, qui ajoutés à 0. 744012, donnent pour grandeur de l'arc de 45°, ou pour celle du quart de cercle, comparé au quarré du rayon, 0.785398, d'où on tire la raison du diametre à la circonférence 1 : 3. 141592, expression qui est conforme dans ces sept chiffres avec celle de *Ludolph*. Il auroit fallu environ

1000000 termes, de la ſuite $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$, &c. pour trouver une approximation auſſi exacte : on doit juger par là de la juſteſſe de celles que donnera la même méthode appliquée à des ſuites déja médiocrement convergentes.

La ſerie ſuivante, qui a le même objet que celle qu'on vient de voir, eſt dûe à M. *Simpſon* : elle a quelque avantage ſur l'autre, en ce qu'elle eſt plus aiſée à continuer, la loi de la progreſſion des coefficiens étant plus apparente. Je conſerve ici les mêmes dénominations que dans la premiere formule que j'ai déja donnée, à cela près que r ſera $= 2n + 1$, & $m = 1 + tt$; alors on a, ſuivant M. *Simpſon*, pour la valeur très-convergente de la ſuite $t - \frac{t^3}{3}$, &c. cette formule $S + \frac{tr}{rm}$ $\left(1 + \frac{2\,t^2}{r+2.m} + \frac{2.\ 4.\ t^4}{r+2.r+4.m^2} + \frac{2.\ 4.\ 6.\ t^6}{r+2.r+4.r+6.m^3}\right.$

$$+ \frac{2.\ 4.\ 6.\ 8.\ t^8}{r+2.\ r+4.\ r+6.\ r+8.\ m^4}$$

+ &c.). Le ſigne ambigu $\pm$ ſignifie qu'il faut ajouter ſi le premier terme qui ſuit ceux qu'on a renfermés dans la ſomme *S* eſt poſitif; il faudra ſouſtraire s'il eſt négatif. Cette méthode égale la précédente en exactitude. En l'appliquant à $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$, &c. ſix termes ſeulement de cette ſuite, joints aux ſix premiers de la ſeconde, donnent, comme ci-devant, l'expreſſion 0. 785398 pour la valeur du quart de cercle, le quarré du rayon étant 1.

La plupart des autres ſuites qu'on peut employer pour trouver l'aire du cercle, ſont ſuſceptibles d'abréviations ſemblables. Mais il ſeroit trop long d'en expoſer ici la théorie générale, qui dépend de celle de la ſommation des ſuites. Le ſimple hiſtorique auquel on s'eſt borné ne permet pas d'entrer dans ces détails, & l'on ſe contentera

d'avoir indiqué les livres où on peut les trouver.

XXII. Les ſuites infinies fourniſſent enfin des moyens commodes pour trouver des conſtructions géométriques ou des expreſſions analytiques, qui repréſentent, à très-peu de choſe près, des eſpaces ou des arcs circulaires; car on peut combiner de telle maniere deux grandeurs, que la ſuite dans laquelle elles ſe réſoudront, coincide dans ſes premiers termes avec celle qui repréſente la valeur de cet arc, ou cet eſpace circulaire qu'on veut réduire en ligne droite ou en figure rectiligne. En prenant donc cette premiere ſuite, ou la grandeur finie qu'elle exprime, pour la derniere, on aura fort près la valeur de celle-ci, puiſque ce moyen en donne non ſeulement les premiers termes, mais encore une partie de tous les autres. Les exemples ſuivans, dont quelques-uns ſont

tirés des Lettres de *Newton* *, & de ſon Traité des fluxions, vont éclaircir cela. Et ce qu'on y exécute ſur le cercle, peut commodément ſe pratiquer dans une infinité d'autres cas & ſur d'autres courbes, dont on a quelquefois beſoin de calculer l'aire approchée avec plus de promptitude que de préciſion.

Qu'on veuille donc trouver l'arc, la corde étant donnée. On ſçait que celui-là étant z, la corde eſt $z - \frac{z^3}{4.\,6.\,rr} + \frac{z^5}{4.\,4.\,120\,r^4} -$ &c. nous la nommerons A; ſoit B la corde de la moitié de cet arc, elle eſt $\frac{1}{2}z - \frac{z^3}{4.\,8.\,6.\,rr} + \frac{z^5}{4.\,4.\,32.\,120\,r^4} -$ &c. Si l'on combine ces deux grandeurs en ôtant la premiere de huit fois la ſeconde, le reſtant ſera très-prochainement égal à trois

* *Voyez Comm. Epiſt. p. 56 & ſuiv.*

fois l'arc, car huit fois $B = 4z - \frac{z^3}{4.6rr} + \frac{z^5}{4.4.4.120r^4}$, &c. dont ôtant A, le reste est $3z - \frac{z^5}{21760}$ — &c. Or comme ces derniers termes sont très-petits, pour peu que z soit moindre que l'unité, il s'ensuit qu'on peut les négliger entierement, & que $8B - A = 3z$. Il est donc vrai, comme *Huygens* l'a démontré, que huit fois la corde de la moitié d'un arc moins la corde de l'arc entier, égalent trois fois l'arc, ou que huit fois la corde d'un arc moins celle de l'arc double, different très-peu du sextuple de cet arc. On peut encore dire que quatre fois la corde moins le sinus d'un arc, sont égales, à une très-petite différence près, à cet arc triplé.

On trouve de même que si l'on prolonge le diametre BA (*fig.* 21) de la quantité $AE = CB - \frac{1}{5}BF$, l'arc BG excede très-peu le segment de

la tangente *BH*, coupé par la ligne *ÆGH*. Cette propoſition démontre la vérité de celle de *Snellius*, qui faiſant *eA* = au rayon, diſoit que *BH* étoit moindre que l'arc *BG*. Cette derniere eſt vraie à plus forte raiſon, car la ligne *Ae* étant toujours plus grande que *AE*, la ligne *Bh* eſt néceſſairement moindre que *BH*. Mais de cela même il eſt aiſé de conclurre que *BH* approche bien plus près de la légitime valeur de *BG* que *Bh*, qui cependant, comme nous l'avons fait voir, en eſt très-peu éloignée.

Quand on a la grandeur d'un arc, il eſt fort facile de trouver l'aire du ſecteur ou du ſegment : ainſi les méthodes précédentes pourroient ſuffire à cet objet. Cependant comme on peut le faire immédiatement, en voici quelques moyens que nous fournit M. *Newton* dans les endroits cités. Le ſegment *BGF* étant propoſé, on pourra prendre pour ſa valeur l'expreſ-

ſion $\overline{\frac{2}{3} BG + GF} \times \frac{2}{15} BF$. Mais ſi l'on veut une plus grande exactitude, qu'on diviſe BF en deux également au point I, alors le rectangle $4 GI + BG \times \frac{2}{15} BF$ approchera tellement de la valeur exacte du ſegment BFG, que lors même qu'il deviendra le quart de cercle, il s'éloignera à peine de la vérité d'une 1500e partie de l'aire totale.

M. *Leibnitz*, dans une de ſes Lettres à *Newton*, a donné cette expreſſion pour trouver l'arc, le coſinus étant connu : que le rayon ſoit l'unité, & c ce coſinus, l'arc ſera $\sqrt{6 - \sqrt{24c + 12}}$. Ici l'erreur, ſelon la remarque de M. *Newton*, étant $\frac{v^3}{90} + \frac{v^4}{194}$, &c. la lettre v déſignant le ſinus verſe, ou $1 - c$, elle ſera fort petite quand v ſera moindre que le tiers du rayon. Cette condition eſt néceſſaire pour l'employer avec quelque ſureté ; il y en

aura davantage à se servir de la suivante, dûe à M. *Newton.* v étant toujours le sinus verse, qu'on fasse comme $120 - 27v$ à $120 - 17v$; ainsi la corde $\sqrt{2v}$ a une quatriéme proportionnelle, elle approchera si près de l'arc correspondant, que l'erreur sera seulement d'environ $\frac{61 v^3 \sqrt{2v}}{44800}$, ce qui égalera à peine cinq secondes lorsque l'arc ne surpassera pas 45°, & sera même moindre qu'une seconde s'il n'étoit que de 30°.

Après avoir exposé les découvertes de ces grands hommes, qui semblent ne rien laisser à desirer sur ce sujet, me sera-t-il permis de faire part d'une méthode qui m'a paru commode pour déterminer par approximation la valeur de ces différens espaces, ou arcs circulaires? Elle est fondée sur un certain moyen de trouver la somme approchée des suites qui les expriment;

moyen que j'ai autrefois appliqué, avec quelques changemens, à former des regles pratiques & exactes pour toiser les surfaces des voûtes *en cul de four, surhaussées* ou *surbaissées*; c'est-à-dire, pour m'énoncer en termes plus intelligibles aux Géometres, des sphéroïdes allongés & applatis. Car on sçait, pour peu qu'on ait passé les bornes de la Géométrie ordinaire, que les surfaces de ces corps suivent le même rapport que des espaces elliptiques ou hyperboliques. Soit donc un segment circulaire *BGF* (*fig.* 21) dont l'abcisse est x, le diametre l'unité; on a vû qu'il se réduit à la suite $\sqrt{x} \times (\frac{2}{3}x - \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{28}x^3 - \frac{1}{72}x^4 - \frac{5}{576}x^5$, &c.) Pour en trouver la somme approchée, je cherche une expression qui se resolve en une suite à peu de chose près égale à celle-là; je la suppose $\frac{2}{3}x\sqrt{x - nxx}$, & l'ayant développée en suite, j'ai $\sqrt{x} \times (\frac{2}{3}x$

$-\frac{1}{3} n x^2 - \frac{1}{12} n^2 x^3 - \frac{1}{24} n^3 x^4 - \frac{10}{3 \cdot 8 \cdot 16} n^4 x^5$, &c.) Je remarque enfin que ſi je donne à n une telle valeur que les ſeconds termes de chaque ſuite ſoient égaux, ce qui ſuffira ſi x n'eſt qu'une petite partie du diametre, alors on aura les deux premiers termes avec une partie de chacun des ſuivans; & par conſéquent à peu de choſe près, la ſomme de la ſuite. Afin donc de déterminer n, j'égale les deux premiers termes d'où je tire $n = \frac{3}{5}$, ainſi l'expreſſion $\frac{2}{3} x \sqrt{x - \frac{3}{5} xx}$, ſera la valeur approchée du ſegment circulaire, quand ſon abciſſe ne paſſera pas le quart ou les $\frac{2}{5}$ du diametre. En effet, mettant à la place de n & de ſes puiſſances, leurs valeurs dans la ſuite donnée ci-deſſus, elle ſe réduit à $\sqrt{x} \times (\frac{2}{3} x - \frac{1}{5} x^2 - \frac{9}{300} x^3 - \frac{27}{3000} x^4$, &c. dont la différence avec la premiere n'eſt que $0 - 0 + \frac{1}{210} x^3 + \frac{1}{205} x^4$, &c. Lors donc que x ſera ſeulement

$= \frac{1}{4}$, cette différence ne montera qu'à $\frac{1}{13440} + \frac{1}{52480} +$ &c. ce qui ſera une très-petite valeur.

Mais quand il s'agira de ſommer un ſegment dont l'abciſſe ſera plus grande qu'un quart du diametre, alors il faudra faire enſorte que les troiſiémes termes des deux ſuites ſoient égaux entr'eux, ce qui rendra la derniere beaucoup plus approchante de la premiere, pourvû qu'on ait l'attention de ne pas négliger la différence qui ſe trouvera alors entre les deux ſeconds termes. Comparons donc & égalons $\frac{1}{12} n^2 x^3$ à $\frac{1}{28} x^3$, on tire de là $n = \sqrt{\frac{3}{7}}$; cette valeur ſubſtituée dans la ſeconde ſuite, la transforme en celle-ci: $\sqrt{x} \times (\frac{2}{3} x - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{7}}\, x^2 - \frac{3}{7 \cdot 12} x^3 - \frac{3}{7 \cdot 24} \sqrt{\frac{3}{7}}\, x^4 - \frac{90}{24 \cdot 16 \cdot 21} x^5$ &c.), dont la différence avec celle qui exprime l'aire du ſegment, eſt $\sqrt{x}\, (\times 0 + \overline{\sqrt{\frac{1}{21}} - \sqrt{\frac{1}{25}}}\, x^2 + 0 - \frac{1}{495} x^4$

$-\frac{1}{382}x^5$ — &c.) de là il suit qu'ajoutant à l'expression $\frac{2}{3}x\sqrt{x - \sqrt{\frac{3}{7}}xx}$, la valeur de $\sqrt{\frac{1}{21} - \sqrt{\frac{1}{25}}x^2}$, on aura, à peu de chose près, la somme de la suite qui exprime la grandeur du segment *BGF*. Et en effet, lorsque x deviendra égale au rayon ou à $\frac{1}{2}$, puisque le diametre est 1, la différence sera seulement $\frac{1}{11314} + \frac{1}{17480} +$ &c. mais tous ces termes & les suivans ne peuvent faire, comme l'on voit, qu'une très-petite quantité. Cette différence seroit encore beaucoup moindre si la grandeur d'x n'étoit que de $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{4}$; on pourra donc prendre pour celle d'un segment circulaire quelconque dont l'abcisse est x, le diametre l'unité, on pourra, dis-je, prendre $\frac{2}{3}x\sqrt{x - \sqrt{\frac{3}{7}}xx}$ $+ \sqrt{\frac{1}{21} - \frac{1}{5}x^2}$, ou $\frac{2}{3}x\sqrt{x - 0.654xx}$ $+ 0.019.xx$.

On peut traiter de même l'expres-

ſion $x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{112} - \frac{5x^9}{1152}$, &c. qui exprime l'aire du ſegment circulaire *CBED* (*fig.* 19), l'abciſſe étant priſe à compter du centre ; car réduiſant en ſuite l'expreſſion indéterminée $x\sqrt{1-nxx}$, puis comparant le troiſiéme terme $\frac{n^2x^5}{8}$ au troiſiéme de la premiere $\frac{x^5}{40}$, on trouve $\frac{1}{5} = n^2$, & alors la grandeur $x\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{5}}\,xx}$, ou $x\sqrt{1-0.429\,xx}$, en lui ajoutant $\sqrt{\frac{1}{20}}-\frac{1}{6}x^3$ ſera très-prochainenement égale au ſegment cherché, car cette expreſſion développée en ſuite, eſt $x - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}\,x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{80}\sqrt{\frac{1}{5}}\,x^7 - \frac{1}{640}x^9$, &c.

Or cette ſuite ne differe de la précédente que de l'excès du ſecond terme $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}\,x^3$ ſur $\frac{1}{6}x^3$, (c'eſt pourquoi nous l'ajoutons à l'expreſſion propoſée), & de la quantité $-\frac{1}{308}x^7$

$-\frac{1}{359}x^9$ — &c. Conſéquemment lorſque x ne ſera que la moitié ou les deux tiers du rayon, cette derniere quantité s'évanouira preſque, à cauſe de la hauteur des puiſſances des termes x^7, x^9 & les ſuivans; car dans le premier cas elle ſe réduira à $\frac{1}{37424}$ $+ \frac{1}{183808} +$ &c. du rectangle de l'abciſſe par le rayon.

Il eſt facile d'appercevoir qu'on pourroit ſans peine approcher davantage de l'exactitude en ſuivant le même procédé, c'eſt-à-dire en déterminant n par le moyen d'un terme plus éloigné de la ſuite, & puis ajoutant ou retranchant la différence des ſeconds ou troiſiémes termes de la nouvelle ſuite avec ceux de la premiere. Car à meſure que deux termes plus éloignés de ces ſuites viennent à coincider, elles ſe rapprocheront davantage l'une de l'autre dans les termes qui viendront après; & comme les différences des coefficiens de ces termes ne peuvent manquer d'être

des fractions, parce qu'eux-mêmes sont nécessairement des fractions, qu'elles affecteront des termes où l'indéterminée x est déja élevée à une haute puissance, cela rendra nécessairement la valeur de toutes ces différences peu considérable, & même insensible dans bien des cas.

Ces diverses expressions, comme aussi les suites extrêmement convergentes qui donnent le sinus, la tangente, &c. par l'arc, peuvent être fort utiles dans certaines circonstances. Un Astronome qui dans des pays éloignés seroit privé de ses tables par quelque accident, se verroit sans ce secours absolument déconcerté; avec celui que lui présentent ces inventions, il pourroit continuer ses calculs, & tirer les résultats de ses observations. Plusieurs Auteurs ont traité de ces moyens de se passer des tables, entr'autres *Snellius*, dans sa *Cyclométrie*; M. *Huygens*, dans le traité *de Circuli magnitudine inventa*; M. *Leibnitz*,

dans un écrit inſéré dans les Actes de Leipſick, ſous le titre de *Trigonometria canonica à tabularum neceſſitate liberata* (*a*), & pluſieurs autres.

XXIII. Je ne ſçaurois paſſer ſous ſilence l'ingénieuſe méthode pour la quadrature approchée des courbes, dont M. *Newton* a donné la premiere idée dans ſon traité intitulé *Methodus differentialis*. Elle conſiſte à déterminer, par le moyen de pluſieurs ordonnées connues, & également ou inégalement diſtantes entr'elles, (*b*) de la courbe propoſée, l'équation d'une autre courbe de genre parabolique qui paſſe par toutes leurs extrémités. On appelle ici courbes de genre parabolique celles qui ont une équation de cette forme, $a + bx$

(*a*) Année 1692.

(*b*) On s'eſt borné ici au cas où les ordonnées ſont également diſtantes entr'elles, la ſolution étant conſidérablement compliquée dans celui où leurs diſtances entr'elles ſont inégales.

$+ cx^2 + dx^3$, &c. parce que ce ſont en effet des paraboles de genre ſupérieur, comme on le voit dans l'*énumération des courbes du troiſiéme ordre*, donnée par M. *Newton*. Or comme une courbe de cette nature eſt toujours abſolument quarrable, qu'elle ſerre de très-près la courbe propoſée, & d'autant plus qu'elle paſſe par les extrémités d'un plus grand nombre d'ordonnées, il s'enſuit qu'on aura, en la quarrant, l'aire approchée de la premiere.

L'étendue & l'objet de cet écrit ne me permettent pas de développer ici les propoſitions fondamentales dont *Newton* fait uſage pour parvenir à la ſolution de ce problême. Je me contenterai de préſenter cette ſolution elle-même, & j'indiquerai un moyen ſimple & lumineux de s'aſſurer de ſon exactitude.

Soit donc donné le nombre & la grandeur de pluſieurs ordonnées éga-

lement diſtantes entr'elles, A, B, C, D, E; nous ſupppoſerons ici qu'il y en a 5; on prendra leurs premieres différences $A - B$, $B - C$, $C - D$, $D - E$, qu'on écrira avec les ſignes qui leur conviennent, ſuivant qu'elles ſe trouveront poſitives ou négatives, le terme à ſouſtraire pouvant être plus ou moins grand que celui dont on doit le retrancher. Nous nommerons, pour abréger, ces premieres différences a, b, c, d; on prendra enſuite les différences de celles-ci, $a - b$, $b - c$, &c. que nous appellerons encore pour ſimplifier a', b', c': ſoient encore les différences de ces dernieres, priſes dans le même ordre, $= a'' b''$, & la derniere $a'' - b'' = a'''$; cela fait, ſoit toujours m l'ordonnée du milieu, qui eſt ici C. Qu'on nomme p la moyenne arithmétique entre les deux différences moyennes (voy. fig. 22) b & c; ſoit $b' = q$; $\frac{a'' + b''}{2} = r$, $a''' = ſ$, & ainſi de ſuite, ſi le nombre

des ordonnées eût été plus grand. Ici f est le dernier terme, & quelquefois, ſuivant la nature de la progreſſion des ordonnées, la ſuite des différences ſe terminera plûtôt : mais cela ne jettera aucune difficulté dans la ſolution ; les termes qui manqueront ſeront ſimplement réputés o.

Après cette premiere préparation il faut multiplier de ſuite les termes de cette progreſſion 1; x; $\frac{x}{2}$; $\frac{x^2 - 1}{3x}$; $\frac{x}{4}$; $\frac{x^4 - 4}{5x}$; $\frac{x}{6}$, &c. par eux-mêmes continûment, c'eſt-à-dire d'abord le premier par lui-même, puis le premier & le ſecond, enſuite les trois premiers, &c. cela donnera la ſuite des produits 1; x; $\frac{x^2}{2}$; $\frac{x^3 - x}{3x}$; $\frac{x^4 - xx}{24}$, &c. qu'on multipliera reſpectivement par m. p. q. r. s, &c. Ces produits, liés par le ſigne $+$, feront la valeur de l'ordonnée correſpondante à l'abciſſe x; ainſi l'équation de la courbe

ſera $m + px + q\frac{x^2}{2} + r\frac{x^3 - x}{6} + ſ\frac{x^4 - xx}{24}$. Il faut remarquer qu'alors les abciſſes x prennent leur origine au point F, qu'elles s'étendent poſitivement de F vers H, & négativement de F vers h; c'eſt-à-dire que la valeur de x eſt poſitive pour la partie de la courbe $FGIH$, & qu'elle doit être négative pour la partie contraire, ſuivant les regles ſi connues aujourd'hui de l'analyſe des courbes. Ainſi, pour avoir l'ordonnée po, il faudroit, dans l'équation précédente, changer les ſignes de toutes les puiſſances impaires de x.

Il eſt aiſé de s'aſſurer, par la méthode ſuivante, de la juſteſſe de la ſolution qu'on vient de voir; il n'y a qu'à examiner ſi lorſque les abciſſes deviennent o, FQ, FH, fq, fh, il en réſulte les ordonnées FG, QR, HI, gr, hi. A l'égard de la premiere cela eſt évident, car quand $x = 0$, il ne reſte pour la valeur de l'expreſſion que

le premier terme m, qui eſt égal à l'ordonnée moyenne C ou FG. Pour démontrer les autres cas, il faut développer les différences que nous avons déſignées par des lettres ſimples ; ce procédé nous donnera pour les premieres $A-B$; $B-C$; $C-D$; $D-E$; & le coefficient $p =$ à la moyenne entre les deux du milieu $= \frac{B-D}{2}$. Les ſecondes différences ſeront $A-2B+C$; $B-2C+D$; $C-2D+E$; dont la moyenne eſt $B-2C+D$, qui eſt q. Les troiſiémes différences ſont $A-3B+3C-D$; $B-3C+3D-E$. Et la quatriéme $A-4B+6C-4D+E$. Ici nous remarquerons en paſſant que les coefficiens de ces expreſſions ſont toujours ceux du binome $a+b$, élevé à la puiſſance dénotée par le rang de la différence. Faiſons à préſent $x = 1$ ou FQ, l'équation ſe réduira à Po ou $z = m + p + \frac{q}{2}$; & ſi au lieu de

$m. p. q.$ on met leurs valeurs trouvées ci-dessus, elle deviendra $C + \frac{B - D}{2} + \frac{B - 2C + D}{2} = B$, c'est-à-dire la valeur de QR. Qu'on fasse $x = -2$ ou fh, on aura $y = m - 2p + 2q - r + \frac{1}{2}s$, où mettant au lieu de $m. p. q. r. s$ leurs valeurs en $A. B. C. D. E.$ tout se réduit à $y = E$, ou HI. Il en sera de même si on donne à x les autres valeurs fq ou Fh, c'est-à-dire qu'il en résultera les ordonnées qr, hi; ainsi la courbe passe par les sommets de toutes ces ordonnées.

Il n'a encore été question que du cas où les ordonnées sont en nombre impair; quand ce nombre sera pair, par ex. $A. B. C. D$, on prendra, comme à l'ordinaire, leurs premieres, secondes, troisiémes différences, jusqu'à la derniere (*voy. fig.* 23); on nommera m la moyenne arithmétique entre les deux du milieu, p la différence b ou

$B - C$, q la moyenne entre a', b', enfin a'' ſera appellée r. On multipliera enſuite, comme ci-deſſus, les termes ſuivans, 1; x; $\frac{4xx-1}{4.2x}$; $\frac{x}{3}$, $\frac{4xx-4}{4.4x}$; $\frac{x}{5}$, $\frac{4xx-9}{4.6x}$; &c. & leurs produits ſucceſſifs étant affectés des coefficiens m. p q. r. s. &c. donneront $m + px + \frac{4qxx-q}{4.2} + \frac{4rx^3-rx}{12.2}$, &c. pour l'équation cherchée de y, qui ne comprend ici que ces quatre premiers termes, parce que tous ceux au-delà de r ſont $= 0$. Ici l'origine des abciſſes eſt toujours le point qui partage en deux également l'intervalle des deux ordonnées moyennes, & elles s'étendent poſitivement vers H, & négativement dans le ſens contraire.

Rien à préſent n'eſt plus aiſé que de trouver l'aire entiere de la courbe qui paſſe par les points i, r, G, R, I; il ſuffit d'être initié dans le calcul intégral pour voir qu'il faut multiplier la

ſomme des ordonnées PO, po par dx, & intégrer comme à l'ordinaire; car multipliant Po par dx, cela eſt viſible à l'égard du ſegment $FGOP$. Mais il ſemble qu'on devroit multiplier po par $-dx$, car $fp = -x$; cependant comme par ce moyen l'aire $FGop$ paroîtroit ſous une forme négative, & que néanmoins elle doit être ajoutée poſitivement à la premiere, il faudroit changer ſes ſignes avant l'addition. Or la multiplication de po par dx, & non par $-dx$, produit préciſément cet effet de changer les ſignes, ainſi il n'y a qu'à prendre la ſomme de Po, po & la multiplier par dx, ſon intégrale ſera l'aire $OPpo$; & quand FP ſera faite $= FH$, cette intégrale ſera l'aire entiere $HIGih$.

Prenons à préſent le cas des cinq ordonnées; en changeant les ſignes des termes où ſont les puiſſances impaires de x, dans la valeur Po, ce qui donne la valeur de po, & les ajoutant enſemble,

ſemble, nous aurons $PO + po = 2m + qx^2 + \frac{\int x^4 - \int x^2}{12}$. On peut remarquer ici que tous les termes affectés des différences premieres, troiſiémes, cinquiémes, &c. s'évanouiſſent, & qu'il ne s'agit que de doubler les autres, ce qui facilitera beaucoup cette opération; cela eſt également vrai dans le cas des ordonnées en nombre pair. Enfin cette expreſſion multipliée par dx & intégrée, devient $2mx + \frac{qx^3}{3} + \frac{\int x^5}{60} - \frac{\int x^3}{36}$. Il ne reſte donc qu'à faire $x = 2$, & l'on aura pour l'aire cherchée $4m + \frac{8}{3}q + \frac{32}{60}\int - \frac{8}{36}\int$ égal à $4 \times (m + \frac{2}{3}q + \frac{8}{60}\int - \frac{1}{18}\int)$.

On trouvera, par un moyen ſemblable, que dans le cas des quatre ordonnées l'intégrale eſt $3 \times (m + \frac{9}{24}q - \frac{1}{8}q) = 3 \times (m + \frac{1}{4}q)$.

Le théorême de *Newton*, préſenté ſous cette forme, ſeroit déjà d'une grande utilité pour calculer aſſez com-

modément les aires approchées des courbes, & ſur-tout de celles qui ſe réſolvent en ſuites peu convergentes, dont l'approximation eſt extrêmement pénible ; mais ce théorême fournit encore une pratique plus commode que je vais expoſer. *Newton* s'étant contenté de l'indiquer dans le dernier ſcholie de ſon traité, ce que je vais ajouter en ſera une eſpece de commentaire, de même que le diſcours précédent a pû ſervir à jetter quelque jour ſur le reſte de cet excellent traité.

Reprenons encore ici les cas des cinq ordonnées, pour leſquelles nous avons trouvé $4\,(m + \frac{2}{3}\,q + \frac{2}{15}\,ſ - \frac{1}{18}\,ſ)$; or l'on a fait voir plus haut qu'elles étoient les valeurs de $ſ$ & q, en expreſſions où il n'entre que des ordonnées : celle de q y a été trouvée $= B - 2\,C + D$, & celle de $ſ$ $= A - 4\,B + 6\,C - 4\,D + E$. On pourra donc ſubſtituer à m. q. $ſ$. ces valeurs, & dans ce cas l'opération faite,

la formule ci-dessus devient $= \frac{4}{90}$ $(7\,A + 32\,B + 12\,C + 32\,D + 7\,E)$, ce qui est égal à $\frac{1}{90}(7\,\overline{A + E} + 32\,\overline{B + D} + 12\,C)$, multiplié par 4, ou plus généralement par l'intervalle entre la premiere & la derniere ordonnée que nous nommerons dorénavant R. On s'assurera par un semblable procédé que lorsqu'on n'employera que trois ordonnées, l'aire approchée sera $\frac{1}{6}(\overline{A + C} + 4\,B)\,R$; pour sept elle sera $\frac{1}{840}$ $(41\,\overline{A + G} + 216\,\overline{B + F} + 27\,\overline{C + E} - 272\,D)\,R$. Nous ne pousserons pas plus loin cette table pour les ordonnées impaires, parce qu'il est rare qu'on ait besoin d'en employer plus de sept; d'ailleurs il est aisé d'y suppléer dans le besoin.

La méthode n'est pas différente pour les ordonnées en nombre pair. On a vû plus haut que la formule pour 4 devenoit $3\,(m + \frac{1}{4}\,q)$, & un peu aupara-

vant on a remarqué que q étoit la moyenne entre les deux différences $A - 2B + C$, & $B - 2C + D$, c'est-à-dire $= \frac{A - B - C + D}{2}$, & que m étoit la moyenne entre B, C, c'est-à-dire $\frac{B + C}{2}$, conséquemment la formule se réduira à $\frac{3}{8}(\overline{A + D} + 3\overline{B + C})$ ou bien, en nommant encore R la portion de l'axe entre la premiere & la derniere ordonnée, $\frac{1}{8}(A + D + 3\overline{B + C})R$: pour six ordonnées on aura $\frac{1}{288}(19\overline{A + F} + 75\overline{B + E} + 50\overline{C + D})R$.

Nous allons enfin ranger toutes ces expressions en forme de table, pour la commodité des lecteurs qui en auroient besoin ; mais pour abréger nous y nommerons A' simplement la somme de la premiere & la derniere ordonnée, B' celle de la seconde & la pénultiéme, &c. & dans le cas des ordonnées

impaires, la derniere lettre sera l'ordonnée du milieu. Nous avons négligé les cas où l'on n'employeroit qu'une ou deux ordonnées, parce qu'on ne doit en attendre aucune exactitude. La premiere colonne perpendiculaire contient le nombre des ordonnées, à côté duquel est exprimée l'aire.

3 $\frac{1}{6}$ $(A' + 4B')R$.
4 $\frac{1}{8}$ $(A' + 3B')R$.
5 $\frac{1}{90}$ $(7A' + 32B' + 12C')R$.
6 $\frac{1}{288}$ $(19A' + 75B' + 50C')R$.
7 $\frac{1}{840}$ $(41A' + 216B' + 27C'$
$+ 272D')R$.

M. *Newton* ajoute, ce qui peut servir à simplifier beaucoup ces calculs, que si l'on prend le double de l'ordonnée du milieu, & que l'on joigne ensemble les ordonnées qui en sont également distantes, comme *QR* avec *qr*, *HI* avec *hi*; qu'enfin l'on substitue ces sommes à chacune des premieres *QR*, *HI*, il se formera une nouvelle

courbe $\gamma\varsigma\omega\iota$, dont l'aire ſera égale à celle de la premiere. C'eſt ce qui a été démontré plus haut, que pour avoir l'aire des deux parties de la courbe par une même & unique intégration, il falloit ajouter les deux ordonnées *PO*, *po*, multiplier leur ſomme par *dx*, & qu'en intégrant enſuite, on auroit à la fois les deux aires *POGF*, *poGF*. M. *Newton* propoſe encore quelques moyens propres à transformer ces courbes, mais mon deſſein n'eſt pas ici de faire un commentaire de ſon traité entier ; ainſi je reviens à mon objet principal, en faiſant une application de cette méthode à la meſure du cercle.

Nous ſuppoſerons donc pour cet effet que le rayon eſt 8, & qu'il eſt diviſé en huit parties égales, afin d'avoir cinq ordonnées dans le ſegment (F. 24) *AEea* qui répond au demi-rayon ; mais ces ordonnées auront en fractions décimales les valeurs ſuivantes.

$Aa = 8.000000$; $Bb = \sqrt{63}$ $= 7.937253$; $Cc = \sqrt{60} = 7.745966$; $Dd = \sqrt{55} = 7.416198$; Ee enfin $= \sqrt{48} = 6.928203$. Ainſi la ſomme A de la premiere Aa & de la derniere Ee ſera 14.928203 ; celle de la 2e & la quatriéme (B') ſera 15.353451 ; on aura enfin $Cc = 7.745966$. Par conſéquent les $7A' + 32B' + 12C'$ de la formule qui convient au cas des cinq ordonnées, ſeront 688.759445, ce qui doit être multiplié par 4 & diviſé par 90. Ces opérations donneront 30.611539 pour l'aire du ſegment $AaeE$, ce qui ne differe de ſa vraie valeur que dans le ſixiéme chiffre. Car ſi l'on en retranche le triangle AEe $= 13.856406$, le reſtant 16.755124 exprimera le ſecteur Aae dont le triple ou 50.265372 ſera le quart de cercle entier, le quarré du rayon étant 64.000000 : & enfin réduiſant ce rapport au dénominateur 1.000000

on trouvera le premier nombre = 0. 785396 ; ſuivant d'autres formules plus exactes on auroit eu 0. 785398. L'erreur de celle-ci n'eſt donc que dans le ſixiéme chiffre, & elle eſt environ $\frac{2}{1.000000}$ ou $\frac{1}{5.00000}$; le nombre 0. 785398 étant à peine plus grand qu'il ne faut, puiſque le chiffre ſuivant n'eſt que l'unité.

Nous donnerons encore un exemple de l'application de ces formules à la meſure d'un eſpace circulaire. Ici nous ne prendrons que quatre ordonnées également diſtantes dans le même ſegment dont il vient d'être queſtion. Pour cela il faudra ſuppoſer le rayon diviſé en ſix parties égales, & alors ces quatre ordonnées ſeront en fractions décimales 6. 00000 ; 5. 91756 ; 5. 65685 ; 5. 19615 ; par conſéquent $A' + 4 B'$ de la formule des quatre ordonnées auront pour valeur 45. 91938, qu'il faudra multiplier par 3 & diviſer par 8, ce qui donnera

17. 21977. Afin de voir jusqu'à quel point on approche de l'exactitude, il n'y a qu'à en retrancher le triangle *AEe*, qui est ici 7. 79422, & le reste 9. 42555 étant triplé, donne pour le quart de cercle 28. 276650; ce qui comparé au quarré du rayon 36000000, est la même chose que 0. 785460 à 1. 000000. L'erreur est donc moindre que l'unité au cinquiéme chiffre, & elle va en tout à peu près à un 12000 seulement, ce qu'on doit regarder comme peu considérable eu égard à la facilité de l'opération.

Mais si on faisoit usage de la remarque de *Newton*, & qu'on doublât, dans le cas des cinq ordonnées, celle du milieu *C c*, qu'on prît enfin les sommes des ordonnées *QR*, *qr*; *HT*, *hi* pour en faire les nouvelles ordonnées *Q ρ*, *HI* de la courbe *γρωι*, il faudroit seulement employer la formule (*Al* (F. 22.)

$+ 4B') \frac{R}{6}$, ou $\frac{1}{3}(A' + 4B')$, puisqu'ici $R = 2$; on auroit alors $A' + 4B' = 91.833939$: or ce nombre divisé par 3 donneroit 30. 611313, qui approche considérablement encore de la vraie valeur. Car en retranchant le triangle *AEe*, 13. 856406, & triplant le reste 16. 754907, on a pour rapport du quart du cercle au quarré du rayon, celui de 50. 264721 à 64. 000000 ; ce qui est la même chose que celui de 0. 785386 à 1. 000000. L'on voit que le premier nombre s'accorde avec ceux que donne la proportion de *Ludolph*, jusqu'aux deux derniers chiffres qui devroient être 98 au lieu de 86, de sorte que l'erreur n'est que d'une 83000. Il y a donc quelque avantage, comme le remarquoit M. *Newton*, à réduire le cas des cinq ordonnées à celui de trois, puisque l'erreur est encore presque insensible, & que l'opération est considéra-

blement abrégée. C'eſt pourquoi, afin de faire cette réduction commodément, nous ſubſtituerons dans la pratique à la formule uſitée alors, celle-ci $\frac{1}{12}$ $(A' + 4B' + 2C') \times R$. en prenant comme à l'ordinaire A' pour la ſomme de la premiere & la cinquiéme, B' pour la ſeconde & la quatriéme, & C' pour la moyenne. Car cette formule équivaudra à la réduction qu'on vient de faire des cinq ordonnées à trois.

XXIV. M. *Thomas Simpſon*, un des plus profonds Géometres qui illuſtrent aujourd'hui l'Angleterre, a donné * une nouvelle méthode pour la dimenſion des aires des courbes que nous croyons devoir joindre ici aux précédentes. Il ſuppoſe, de même qu'on a fait dans l'article ci-deſſus, un certain nombre d'ordonnées à égales diſtances; &, par une opération fort ſimple, il

* *Math. Diſſertations*, p. 109.

trouve l'aire de la courbe avec une exactitude qui approche beaucoup de la vérité : cette méthode est fondée sur la considération suivante. Soit la courbe *IRGri* (*fig* 22.), & qu'on conçoive les sommets des deux ordonnées *FG*, *hi*, joints par une ligne droite, on peut imaginer dans le petit segment *Gri*, un segment parabolique inscrit qui aura son sommet en *r*, & son axe ou diametre dans la position *rq*. Lors donc que les ordonnées équidistantes seront suffisamment voisines, on pourra regarder cet arc parabolique comme coincidant avec la courbe proposée. Or ayant tiré une parallele à *Gi* par le sommet *R*, ce segment est égal aux deux tiers du parallelogramme *Gri*, ou son égal *Fh* par *ur*. L'aire *FGrih* est donc égale au trapeze *FGih*, plus aux deux tiers de ce petit parallelogramme. Mais *ur* est la différence de *qr* & de *qu* moyenne arithmétique entre *GF* & *hi*, c'est par conséquent

$qr = \frac{GF + hi}{2}$ ou $\frac{2qr - GF - hi}{2}$;

ce qui étant multiplié par $\frac{2}{3} Fh$, donne $\frac{1}{3} qh \times (4qr - 2GF + hi)$. D'un autre côté le trapeze $FGih = (GF + hi) \times qh$; d'où l'on tirera, en ajoutant ces deux grandeurs & réduisant à même dénomination, l'aire $FGrih = \frac{1}{3} qh \times (hi + 4qr + GF)$. Par la même méthode on trouvera l'aire $FGRIH = \frac{1}{3} QH \times (GF + HI + 4QR)$: conséquemment l'aire entiere sera $(hi + 4Qr + 2GF + 4QR + HI)$ multipliée par $\frac{1}{3} QH$ ou qh. De là il suit que si l'on prend quatre fois les ordonnées 2e. 4e. 6e. &c. une fois la premiere & la derniere, & le double de toutes les autres, qu'on multiplie enfin ces sommes par le tiers de la distance commune QH des ordonnées, on aura fort près l'aire de la courbe. Donnons-en un exemple.

Nous reprendrons pour cela les 5 ordonnées du segment $Aae E$, dont (F. 24.)

l'abciſſe *AE* eſt égale au demi-rayon; l'intervalle *BA* eſt l'unité; ainſi l'aire *AaeE* ſera $\frac{1}{3}$ (*Aa* + *Ee* + 4 *Bb* + 4 *Dd* + 2 *Cc*) ce qui deviendra en mettant à la place de ces ordonnées leurs valeurs, ce qui deviendra, dis-je, 30. 611313. d'où l'on tirera, comme on a fait plus haut, le rapport du quart de cercle au quarré du rayon, comme 0. 785386 à 1. 000000 : or ce rapport eſt vrai juſqu'au pénultiéme chiffre, qui ne devroit être plus grand que d'une unité pour s'accorder avec celui qu'on a ſi ſouvent cité. Je ne crois pas qu'on puiſſe rien trouver de plus ſimple, & en même temps de plus approchant de la préciſion.

Au reſte, il eſt aiſé d'appercevoir que cette regle exige néceſſairement que le nombre des ordonnées ſoit impair; mais c'eſt une ſujétion légere qui diminue très-peu ſes avantages. Il eſt auſſi à propos, afin qu'elle ait ſon effet entier, que la courbe ſoit ou toute con-

vexe, ou toute concave vers ſon axe, à moins que les ordonnées ne ſoient extrêmement voiſines; autrement il faudroit tirer une ordonnée du point d'inflexion, qui la partageroit en deux ſegmens, l'un concave, l'autre convexe, vers l'axe, & on les meſureroit à part.

J'ajouterai qu'on pourroit dans certains cas rendre cette regle beaucoup plus parfaite, en déterminant quelle eſpece de parabole conviendroit le mieux avec le petit ſegment curviligne. Il faudroit pour cela examiner quel rapport auroient les ſecondes différences des ordonnées avec les ſecondes différences des abciſſes. Si celles-là, par exemple, étoient comme les cubes de celles-ci, il eſt viſible que le ſegment parabolique le plus voiſin de celui de la courbe appartiendroit à une parabole dont l'équation eſt $y^3 = x$; alors la regle changeroit un peu, ce petit ſegment étant au parallelogramme circonſcrit comme 3 à 4; mais je me

contenterai d'indiquer cette addition à l'ingénieuſe regle de M. *Simpſon*, parce que ce n'eſt pas ici le lieu d'en approfondir davantage la théorie. Les Géometres me comprendront du premier coup, & il faudroit pour les autres des explications aſſez longues.

XXV. Je terminerai ce chapitre en donnant une idée de l'ingénieux moyen dont M. *Jean Bernoulli* a fait uſage pour déterminer des limites de plus en plus rapprochées du rapport de la circonférence circulaire au diametre. On s'eſt borné à ce brief extrait de ſon écrit, parce que ſa nature ne permet gueres de l'analyſer avec plus de detail, ſans tomber dans une prolixité que nous cherchons à éviter. Les Lecteurs dont nous aurons excité la curioſité, pourront conſulter les œuvres de ce grand Homme, qui ſont ou qui doivent être entre les mains de tous ceux qui aſpirent à des connoiſſances profondes dans la Géométrie & l'analyſe.

La méthode dont nous venons de parler, consiste en ceci. Qu'on imagine une courbe telle qu'un quart de cercle (dont les tangentes aux deux extrêmités se rencontrent l'une l'autre perpendiculairement) se développer en commençant par une de ses extrêmités: l'extrêmité de cette circonférence courbe qui se roidit en ligne droite & se déplie, décrira une nouvelle courbe qu'on pourra supposer se développer aussi, mais en sens contraire, c'est-à-dire en commençant par le côté qui a été décrit le dernier; de là en naîtra une troisieme qu'on concevra développée de la même maniere, & ainsi à l'infini. Toutes ces courbes, comme le remarque M. *Bernoulli*, approchent de plus en plus de l'égalité & de la similitude parfaite, & elles ne tardent même pas à être sensiblement égales; on peut encore observer qu'elles deviennent de plus en plus semblables à des cycloïdes. C'est une conséquence de cette vérité

connue que ces courbes ſont les ſeules ordonnées paralleles, dont le développement ne fait que les reproduire.

Ayant donc nommé *a* la premiere courbe, c'eſt-à-dire le quart de circonférence dont le rayon eſt l'unité, M. *Bernoulli* détermine la longueur de toutes les autres par une ſuite d'expreſſions fort régulieres & fort aiſées à continuer pour tel nombre de courbes qu'on peut deſirer. Ces expreſſions ont de plus cet avantage, d'être extrêmement ſimples; car après les réductions convenables, elles ne renferment que la grandeur *a* élevée à une puiſſance dont l'expoſant eſt celui du rang de la courbe en comptant la premiere, & affectée uniquement de quelques coefficiens numériques.

Que l'on ſuppoſe donc, ajoute M. *Bernoulli*, que deux de ces courbes qui ſe ſuivent immédiatement ſoient égales entr'elles, & qu'on égale les deux

expreſſions qui les déſignent. Comme elles ont cette forme Ma^r, Na^{r+1}, il en réſultera néceſſairement une équation ſimple entre a ou le quart de la circonférence, & une fraction numérique qui ſera ſa valeur; or il eſt évident que cette valeur approchera d'autant plus de l'exactitude, que la ſuppoſition qui l'a donnée s'en écartera moins.

Cette conſidération conduit à déterminer des limites alternativement moindres & plus grandes qu'il ne faut; car en égalant la premiere & la ſeconde courbe, on trouve un rapport du quart de cercle au rayon qui excede le vrai; au contraire la ſuppoſition d'égalité entre la ſeconde & la troiſiéme en donne un trop petit, & ainſi de ſuite: au reſte ces limites approchent avec aſſez de promptitude les unes des autres; en effet la comparaiſon de la douziéme & de la treiziéme courbe fournit une proportion du diametre à

la circonférence, telle que celle de 1. 00000. 00. à 3. 14159. 00, & l'égalité ſuppoſée entre la treiziéme & la quatorziéme, la donnent comme 1, 00000. 00 à 31415935; or ces deux valeurs de la circonférence 3.14159 00, 31415935, ſont l'une trop petite, l'autre trop grande, & coincident néanmoins juſqu'au ſixiéme chiffre; ainſi elles ſont vraies dans les ſix premiers, comme on le ſçait d'ailleurs par les approximations ſi connues de *Viete*, *Ludolph*, &c.

CHAPITRE V.

Hiſtoire des Quadrateurs les plus célebres.

J'AI donné dans le cours de cet Ouvrage le nom de Quadrateurs à ces hommes qui, pour la plûpart à peine initiés dans la Géometrie, entreprennent de quarrer le cercle, ou s'obſti-

nent à maintenir d'abſurdes paralogiſmes pour une ſolution légitime de ce problême. Ayant à les nommer ſouvent, il me falloit un terme nouveau pour éviter les circonlocutions, ou ne pas leur prodiguer le titre de Géometres qu'ils méritent ſi peu. J'ai fait uſage de la liberté qu'*Horace* accorde dans une pareille circonſtance ; le mot de quadrateur m'a paru aſſez heureux pour mon objet, & je l'ai adopté.

Le même motif qui m'a porté à déſigner ces eſprits d'une trempe ſi ſinguliere, par une dénomination nouvelle, m'a conduit à ne parler d'eux que dans un article à part. Le ſeul *Hippocrate* de *Chio* & *Gregoire* de *S. Vincent* méritoient quelque diſtinction à cet égard. Aurois-je dû expoſer de ſuite les découvertes dont nous nous ſommes occupés juſqu'ici, & les ridicules prétentions de tant de Quadrateurs anciens & modernes ? Non ſans doute, c'eût été trop honorer ces derniers & faire une eſpece

d'injure aux Auteurs des inventions ingénieuſes qu'on a expoſées dans les chapitres précédens ; les noms d'un *Archimede*, d'un *Wallis*, d'un *Newton*, figureroient mal à côté de ceux des *Bryſon*, des *Oronces*, des *Delaleu*, des *Baſſelin*, &c.

Mais, diront ſans doute quelques perſonnes judicieuſes, quelle utilité peut-il y avoir à tirer de la pouſſiere ces noms déja dégradés auprès de la poſtérité & de leur ſiécle même, par les erreurs de ceux qui les ont portés ? Je me ſuis fait cette queſtion plus d'une fois, & plus d'une fois j'ai été ſur le point de ſupprimer cet article entier; cependant après quelques réflexions j'ai penſé que l'hiſtoire d'un problême célebre par tant de tentatives & de chûtes honteuſes, ne pouvoit être complette qu'en faiſant connoître du moins quelques-uns de ceux qui ſe ſont ſignalés par ce ridicule ; il y a d'ailleurs une ſorte de juſtice à traduire devant la poſtérité,

deshommes qui ſemblent avoir de propos délibéré fermé les yeux à la plus grande évidence. Si l'erreur groſſiere, & presque volontaire, n'étoit punie que de l'obſcurité & de l'oubli, ce châtiment léger ſeroit trop peu capable de retenir les nombreux imitateurs de ceux dont je parle : ils deviendront peut-être plus circonſpects en voyant le mépris & l'eſpece de tache qui accompagne les noms de ceux dont ils ſuivent les traces.

II. Il y eut parmi les Anciens, comme parmi nous, un grand nombre de ces foibles Géometres, qui ſe perſuaderent d'avoir trouvé la Quadrature du cercle ; j'en ai déja cité quelques-uns par occaſion. La prétendue quadrature de *Bryſon*, qui faiſoit le cercle moyen proportionnel entre les quarrés inſcrit & circonſcrit, eſt une erreur indigne de la Géométrie, ſoit qu'on l'entende du moyen arithmétique ou du moyen géométrique ; car la différence eſt de près d'une vingt-uniéme dans le premier

cas ; & à l'égard du dernier, on sçavoit déja de son tems que le moyen géométrique entre ces quarrés étoit l'octogone inscrit.

C'est sans doute de ce nombreux essain de Quadrateurs que parle *Archimede*, dans la préface de sa Quadrature de la parabole. On y lit que plusieurs avoient déja tenté de quarrer le cercle & l'ellipse, mais qu'ils n'avoient qu'enfanté des paralogismes, ou supposé des principes qu'on ne pouvoit leur accorder. La ressemblance de notre âge avec celui d'*Archimede* est entiere ; combien de Quadrateurs qui commencent à partir de quelque principe directement contraire à la Géométrie ! Nous en avons un aujourd'hui pour qui la partie n'est pas moindre que le tout, pour qui la diagonale du quarré n'est pas incommensurable au côté, qui réussit enfin à merveille avec ces principes féconds à quarrer le cercle, non par la méthode des Géométres, mais *par le*

méchanisme

méchaniſme en plein des figures ; ce ſont là ſes propres termes ; *ſpectatum admiſſi riſum teneatis amici.*

III. Je ne dirai rien des ſiécles d'obſcurité qui ont précédé le renouvellement des ſciences parmi nous : on a dû trouver ſouvent la quadrature du cercle dans ces temps où les plus habiles ſçavoient à peine une partie de la Géométrie élémentaire d'*Euclide* : je ne m'amuſerai pas à y fouiller pour en retirer la précieuſe découverte de quelque nom inconnu & qui mérite de l'être ; je paſſe à un tems ſur lequel nous avons plus de lumiere.

IV. Le premier qui, à la renaiſſance des Lettres, occupa les Géometres à réfuter ſes erreurs, eſt le fameux Cardinal de *Cuſa* ; il prétendit avoir réuſſi à quarrer le cercle par deux voyes différentes. Suivant l'une il faiſoit rouler ſur un plan un cercle ou un cylindre, juſqu'à ce que le point qui l'avoit touché au commencement de la révolution,

retournât s'y appliquer ; cependant il faut lui rendre cette justice, il n'étoit pas assez mal-adroit pour prétendre déterminer ce point par un méchanisme si grossier ; il cherchoit à le faire géométriquement, mais son opération est tout à fait erronée : son autre méthode lui donnoit cette fausse détermination de la circonférence ; *si l'on a un cercle,* disoit-il, *& qu'on en décrive un second dont le diametre soit égal au rayon du premier, augmenté du côté du quarré inscrit ; le triangle équilatéral inscrit dans ce second cercle, sera isopérimetre au premier.* Ce n'est pas même là une approximation, car un calcul très-simple fait voir que la circonférence ainsi déterminée, s'écarte beaucoup en dessous des limites d'*Archimede*. *Royaumont* s'y prit de cette maniere pour réfuter la prétention de ce Cardinal Géometre : ce qu'il fit dans plusieurs Lettres écrites en 1464 ou 1465, mais imprimées seulement en 1533, avec quelques autres œuvres,

posthumes de ce sçavant Astronome. Quant à la premiere quadrature du Cardinal de *Cusa*, elle fut de nouveau réchauffée au commencement du seiziéme siécle, par un certain *Bovillus* de Vermandois, que sa seule obscurité a préservé de la risée des Géometres.

V. A ces malheureux Quadrateurs succéda, vers le milieu du seiziéme siécle, *Oronce Finée*. Celui-ci se proposa un objet bien plus vaste qu'aucun Mathématicien de ses prédécesseurs ; la Quadrature du cercle n'est qu'une petite partie des nombreuses découvertes qui composent son Livre, *de rebus Mathematicis hactenus desideratis*. L'invention des deux moyennes proportionnelles, la trisection de l'angle, l'inscription de tous les polygones de côtés impairs dans le cercle, que sçais-je, rien ne se refusa à ses efforts ; il surmonta lui seul toutes les difficultés qui avoient jusques-là arrêté les Géometres, mais l'illusion ne fut pas de longue durée. Un

de ses disciples nommé *Buteon*, Mathématicien plus judicieux, l'attaqua le premier, & démontra ses erreurs. Il fut secondé d'un Mathématicien Portugais, justement célebre de son tems; sçavoir *Pierre Nonius*, ou *Nugnes* dans sa langue, qui releva les bévues d'*Oronce* avec plus d'étendue, dans un livre exprès intitulé *de erratis Orontii.* Ainsi s'évanouit l'espérance d'une immortalité brillante dont *Oronce* s'étoit flaté, & cet ouvrage sur lequel il s'étoit reposé pour sa réputation, fut regardé comme une des plus misérables productions qu'on eut vûe depuis long-tems.

Au reste, *Oronce* prétendoit, ce qu'il peut être utile à quelqu'un de sçavoir pour le préserver de la même erreur; il prétendoit, dis-je, que la circonférence du cercle étoit la moindre des deux moyennes proportionnelles entre les contours des quarrés inscrit & circonscrit; mais cette moyenne excéde les simples limites d'*Archimede*, & on

le réfuta dès-lors en le lui montrant. Depuis ce tems M. *Huygens* a démontré immédiatement que la circonférence du cercle étoit toujours moindre que la moindre des deux moyennes, soit arithmétiques, soit géométriques, entre les contours des polygones semblables, inscrit & circonscrit, quels qu'ils soient.

VI. On vit peu de tems après la chûte d'*Oronce*, paroître dans la carriere un nouveau prétendant à l'honneur de quarrer le cercle ; il se nommoit *Simon Wan-Eyk* (*du-Chesne*). Celui-ci fut apparemment moins maladroit que les précédens ; car *Pierre Metius* qui le réfuta, fut obligé pour le faire, de déterminer des limites beaucoup plus resserrées que celles d'*Archimede* : ce fut là l'occasion de sa découverte du rapport approché de 113 à 355, qui convient avec les chiffres de *Ludolph*, jusqu'au septiéme inclusivement. La Quadrature de *Duchesne* ne

résista pas à cette rigoureuse épreuve, & fut universellement reconnue pour fausse.

VII. Parmi ceux qui se sont flatés dans ces derniers tems d'avoir atteint précisément la vraie mesure du cercle, aucun ne l'a fait avec plus de confiance que *Joseph Scaliger*. Non content de la célébrité dont il jouissoit à titre d'une profonde érudition, il prétendit acquerir le premier rang parmi les Mathématiciens. La découverte de la Quadrature du cercle lui en parut un moyen assuré, & il la trouva comme font tous ceux qui, à peine initiés dans la Géométrie, s'engagent à la rechercher, persuadés qu'elle ne leur échappera pas; il exposa sa rare découverte dans son livre intitulé *nova Cyclometria*, en 1592; & l'air d'assurance avec lequel il l'annonça, en imposa à bien des gens, qui n'hésiterent pas à lui ceindre le laurier de Géometre; mais ceux à qui seuls il appartenoit de décider du mérite géo-

métrique, en jugerent bien autrement : le grand nom de *Scaliger* demandoit de grands adverſaires. *Viete*, le premier Mathématicien de ſon âge, le réfuta, de même qu'*Adrianus Romanus*, Géometre célebre des Pays-Bas, & le P. *Clavius*; ce dernier ſur-tout le mortifia extrêmement, il fit voir que de la Quadrature prétendue de *Scaliger*, il s'en enſuivoit que la circonférence du dodécagone inſcrit étoit plus grande que celle du cercle qui le renfermoit : il ne ſe borna pas à cela, ſes autres ſolutions pitoyables de la triſection de l'angle, de l'inſcription des polygones quelconques impairs, ne furent pas traitées avec plus d'indulgence. Le Géometre Allemand mit au grand jour ſes paralogiſmes, ſa contradiction perpétuelle avec les principes les plus aſſurés de la Géométrie. Pour mettre le comble à l'amertume de la critique, il forma de ces groſſieres bévues, le contraſte humiliant pour *Scaliger*, avec ſa confiance

& la maniere insultante dont il avoit traité *Euclide* & *Archimede*. Il n'y eut qu'une voix à son sujet, du moins parmi les Géometres. J'ajoute à dessein cette restriction, car je n'ignore pas que tel est regardé comme un grand homme par gens hors d'état de l'apprécier, qui n'est qu'un objet de mépris pour ceux qui cultivent le même art ou la même science : nous en avons de nombreux exemples. Quant à *Scaliger*, couronné par ses amis ou quelques ignorans, il fut mis par ceux qui étoient versés dans la Géométrie, au rang des plus mal-adroits Quadrateurs.

VIII. Une histoire aussi détaillée des autres Géometres de cette espece seroit longue, & le peu d'intérêt qu'on doit y prendre ne la rendroit pas supportable. Je me borne donc à faire passer briévement en revûe ceux dont il me reste à parler. J'ai regret de trouver ici *Longomontanus* : ce célebre Astronome du commencement du siécle

dernier, se fit un vrai tort, par sa foiblesse, à se faire illusion sur la Quadrature du cercle. Il voulut que le diametre fût à la circonférence comme 100000 à 314185 (*a*); cela est suffisamment réfuté par les rapports qu'on a donnés ci-dessus, suivant lesquels la circonférence est moindre que 314160 des mêmes parties; mais *Longomontanus* mérite quelque indulgence, eu égard aux travaux utiles dont on lui est redevable en Astronomie. A peu près dans le même tems, *Jean-Baptiste Porta*, Napolitain, tenta la voye des lunulles pour parvenir à la Quadrature du cercle. On trouve bien des puérilités dans son ouvrage, qui aboutit enfin à des paralogismes palpables; quoiqu'il y eût mille propriétés curieuses des lunulles, que des Géometres qui ne songeoient pas à la Quadrature du cercle ont apperçues (*voyez* note 1, c. 2.),

(*a*) Huygens, *de circuli magnitudine inventa*, p. 20.

Porta n'en rencontra aucune, mais seulement des erreurs. Tel est ordinairement le procédé de ceux qui s'adonnent à ce problême : il est hors d'exemple que leur travail ait procuré la moindre découverte géometrique ; j'en excepte le seul *Grégoire de S. Vincent*, dont j'ai parlé avec éloge.

Le fameux *Hobbes* donnoit il y a près d'un siécle dans un travers semblable ; on peut même dire qu'il surpassa en ridicule tous ses prédécesseurs en ce genre ; car non seulement il crut avoir réussi à quarrer le cercle, & à trouver les deux moyennes proportionnelles, mais on ne vit jamais un pareil acharnement à les soutenir contre *Wallis*, qui prit la peine de le réfuter par plusieurs écrits. Le dépit qu'il en conçut se tourna contre les Géometres & la Géométrie elle-même. D'abord il en avoit admis la méthode & les principes ; les contradictions que *Wallis* lui opposa, le conduisirent peu-à-peu à

s'inſcrire en faux contre tous ſes axiomes, & il en entreprit la réforme entiere dans le livre intitulé, *de ratiociniis & faſtu Geometrarum.* Cette querelle lui fit enfanter une foule d'autres écrits, dont les extraits conſignés dans les Tranſactions philoſophiques, ne contribueront pas à établir ſa réputation dans la poſtérité.

Je citerois encore un grand nombre d'autres perſonnages à mettre à côté de ces premiers. Un *Olivier de Serres*, qui trouvoit ſçavamment que le cercle étoit double du triangle équilateral inſcrit ; il ignoroit, ce qui donne une grande idée de ſes connoiſſances en Géométrie, que ce double eſt l'exagone. Un ſieur *Delaleu*, qui fatigua vers le milieu du ſiécle paſſé, les Géometres, par ſon obſtination à maintenir ſes paralogiſmes, contre les réfutations ſolides & évidentes qu'on y oppoſa. Un ſieur *Mallement de Meſſange*, célebre dans les Journaux du tems, par ſes impertinens

ſyſtêmes phyſiques (*a*). Un ſieur *Dethleve Cluvèr* (*b*), qui quarroit méthaphyſiquement le cercle, & déquarroit (qu'on me permette ce terme) la parabole, inſultant aux Géometres, qui avoient été ſi long-tems les dupes d'*Archimede*. Il ne tint pas à M. *Leibnitz* de ſe donner la comédie & à toute l'Europe, en le mettant aux priſes avec M. *Neuwentiit*, qui dans le même tems entaſſoit bien de mauvais raiſonnemens ſur le calcul différentiel. Le ſieur *Mathulon* enfin, condamné il y a environ trente ans, par un Tribunal de Juſtice à la peine qu'il s'étoit impoſée lui-même, ſi l'on convainquoit ſa quadrature de fauſſeté : la perte d'une ſomme de 1000 écus fut la punition qu'il eſſuya pour avoir eu l'ambition de quarrer le cercle, & la témérité de défier pardevant Notaires les Géometres de relever la moindre erreur dans ſes raiſonnemens.

(*a*) Journal des Sçavans, 1679, 80, 81, &c.
(*b*) Act. de *Leipſick*, ann. 1695.

Parmi cette foule de Quadrateurs obſtinés à ſe refuſer aux preuves les plus évidentes, le ſieur *Baſſelin* eſt un des plus récens; il ne faut qu'avoir jetté les yeux ſur ſon livre, pour juger que c'étoit un des plus pitoyables & des plus embarraſſés. Son prétendu rapport s'accordoit à peine avec les limites connues de *Ludolph*, jusqu'au quatriéme chiffre; auſſi prétendoit-il infirmer leur certitude, parce qu'elles ſont au-deſſous du juſte milieu de celles d'*Archimede*. On lui demandoit quelle aſſurance il avoit que la véritable grandeur du cercle ne fût pas au-deſſous de ce juſte milieu; c'étoit, répondoit-il, ſa quadrature, & il ſe diſoit aſſuré qu'elle étoit exacte, parce qu'elle ſe rencontroit dans les limites d'*Archimede*, comme ſi mille autres rapports auſſi faux que le ſien, ne ſe rencontroient pas également entre ces limites. En vain lui faiſoit-on mille raiſonnemens très-palpables pour le deſabuſer, ce pauvre

Géometre, qui dans le tems qu'il quarroit le cercle, ignoroit qu'*Archimede* eût quarré la parabole, est mort dans l'intime persuasion qu'une postérité plus équitable reconnoîtroit quelque jour ce que ses jaloux contemporains lui contestoient; car c'est un foible qui ajoute encore au ridicule des gens de cette espece, que de se persuader que la jalousie seule des sçavans, & sur-tout des Académies, leur oppose les contradictions qu'ils essuyent. Le sieur *Basselin* appréhendoit extrêmement les effets de cette jalousie, ou quelque plagiat odieux; il en agit toujours avec les Commissaires qu'il avoit extorqués, comme un homme qui craint de se voir enlever un secret inestimable; il ne dévoila entierement sa découverte que dans l'impression, pour s'en assurer la gloire.

IX. J'avois crû d'abord devoir m'imposer la loi de ne point parler des Quadrateurs vivans, puisque je ne pouvois

avec équité les ranger dans une autre classe que ceux qu'on vient de voir; mais j'ai fait réflexion que puisqu'ils avoient couru le hazard du jugement du public, il m'étoit permis de les citer devant lui : je me bornerai néanmoins à un petit nombre, c'est-à-dire à ceux que le hazard m'a présentés, ou à qui la singularité de leurs prétentions a donné une sorte de célébrité.

M. *Liger* a rempli les Mercures d'écrits concernant la Quadrature du cercle, & a fait un ouvrage particulier pour prouver que la partie n'est pas moindre que le tout, qu'il n'y a point d'incommensurables, que la racine quarrée de 24 est la même que celle de 25, & celle de 50 la même que celle de 49, &c. Il prouve tout cela, non par des raisonnemens métaphysiques, mais clairement & aux yeux, par le *méchanisme en plein des figures*, pour me servir de l'expression qu'il employe dans un écrit que j'ai vû de lui. Le sieur *Tondu* de *Nangis*

eſt l'Auteur de l'inſigne découverte de meſurer, non plus les lignes courbes en les comparant aux droites, mais les droites en les comparant aux courbes.

Le ſieur *Clerget* a redreſſé les idées des Géometres ſur le cercle. On l'avoit crû depuis l'enfance de la Géométrie, une figure plus grande qu'aucun polygone régulier inſcriptible, quel que fût le nombre de ſes côtés, ou ſuivant la Géométrie moderne, un polygone qui en a une infinité. L'Auteur dont nous parlons a trouvé que c'eſt un polygone d'un certain nombre de côtés déterminé. Fondé apparamment ſur de nouvelles découvertes arithmétiques, il prétend qu'il y a de la contradiction dans la valeur approchée que les Géometres aſſignent à la circonférence circulaire; car, dit-il, comment ſe peut-il faire que les uns l'exprimant par $\frac{3{\cdot}1415}{1{\cdot}0000}$, d'autres nous diſent qu'elle eſt $\frac{3{\cdot}14159265}{1.00000000}$, & qu'enfin il y en a qui l'expriment par 20, 30 chiffres, &c. Avec une pa-

reille ſagacité, l'Auteur pourra conteſter que la racine quarrée de 2 ſoit $\frac{1414}{1000}$, à moins d'une milliéme près, parce qu'un autre affectant une exactitude ſupérieure, aura dit qu'elle étoit $\frac{1.4142135}{1.0000000}$, qui en differe de moins qu'une 1.0000000^{e}. *M. C.* enfin ne ſe bornant pas à la découverte de la Quadrature du cercle, a trouvé la triſection de l'angle, & ſur-tout, ce qui eſt admirable, la grandeur du point où ſe touchent deux ſphéres inégales. Il démontre auſſi, à l'aide des principes féconds dont il eſt l'inventeur, que la terre ne peut tourner autour de ſon axe & dans ſon orbite, ſans une abſurdité palpable.

Il m'auroit été facile de groſſir cette liſte, ſi j'avois donné le moindre ſoin à rechercher ces écrits dignes de l'oubli où ils tombent, après avoir quelquefois amuſé le public par leur ſingularité & la confiance de leurs Auteurs ; mais je croirois avoir à me rendre compte à

moi-même d'un tems si mal employé, & je craindrois d'encourir le blâme des Géometres, si je leur présentois un plus grand nombre de ces objets, qui ont à peine auprès d'eux le mérite du ridicule.

CHAPITRE V.

Addition, contenant l'histoire de quelques autres problêmes fameux en Géometrie, comme ceux de la duplication du cube ou des deux moyennes proportionnelles, & de la trisection de l'angle.

I. L'Impression de cet Ouvrage étoit fort avancée, lorsque des personnes aux avis desquelles je défere, m'ont conseillé de profiter de l'occasion présente, pour traiter historiquement ces deux problêmes, qui le cédent peu en célébrité à celui de la Quadrature

du cercle. Je me ſuis déterminé ſans peine à ce nouveau travail, dans la vûe de l'utilité qui peut en être le fruit. On ne voit en effet que trop de perſonnes malheureuſement obſtinées à la recherche des deux moyennes proportionnelles, ou de la triſection de l'angle, ſans avoir jamais examiné & connu la nature de ces queſtions. Ce chapitre, indépendamment qu'il contient un morceau aſſez curieux de l'hiſtoire de la Géométrie, m'a paru propre à les inſtruire & à les deſabuſer; elles y verront qu'elles s'occuppent infructueuſement à rechercher, ou ce qui eſt déja trouvé, ou ce qui eſt impoſſible. Je m'explique, ces problêmes ſont réſolus autant qu'ils peuvent l'être : en ce ſens, y travailler c'eſt chercher ce dont on eſt déja en poſſeſſion; mais prétendre les reſoudre par la régle & le compas ſeulement, c'eſt-à-dire par de ſimples interſections de lignes droites & circulaires, c'eſt s'obſtiner à une recherche

vaine & impoſſible. Cette vérité n'eſt aujourd'hui ſujette à aucune conteſtation parmi les Géometres, & l'on s'attachera plus bas à la bien prouver. J'entre en matiere & je commence par la duplication du cube.

II. Il s'agit dans cette premiere queſtion de trouver un cube, ou plus généralement un ſolide quelconque, précisément double ou en raiſon donnée, avec un ſolide ſemblable. Les Géometres apperçurent bientôt que cela ſe réduiſoit à déterminer les deux moyennes proportionnelles continues entre deux lignes données. *Hippocrate de Chio* fut, dit-on, l'auteur de cette remarque; elle ſuit de cette propriété ſi connue des progreſſions géométriques, que le quarré du premier eſt au quarré du ſecond, comme le premier au troiſiéme; le cube du premier à celui du ſecond, comme le premier au quatriéme, &c. c'eſt-à-dire qu'en général la puiſſance du premier terme déſignée par

l'expofant *m*, eft à la puiffance femblable du fecond, comme le premier terme à celui dont le rang dans la fuite eft expofé par $m + 1$. Ainfi la ligne *A* étant le côté d'un cube propofé, la premiere des deux moyennes continues entre *A* & *m*, *A* fera le côté d'un cube multiple du premier, comme *m* l'eft de l'unité. Ce qu'on vient de dire des côtés d'un cube s'applique aux côtés homologues des folides femblables; il fuffit pour le voir d'être initié dans la Géométrie.

III. Tout le monde fçait la maniere dont on raconte l'origine du problême de la duplication du cube; c'eft en Géométrie un trait auffi fameuxque celui de l'hecatombe immolée par *Pythagore*. Si l'on s'eft moqué (*a*) avec juftice de ce prétendu facrifice, qui n'eft compatible ni avec les facultés d'un philofophe, ni avec les dogmes qu'enfeignoit celui de Samos, on ne doit pas plus

(*a*) *Ciceron. Tufculan.*

d'égards à l'hiſtoire qu'on fait du problême des deux moyennes proportionnelles. Je ne répeterai donc pas ici ce qu'on trouve dans tant d'autres endroits, la fable de cette divinité bizarre, qui demandoit un autel préciſément double de celui qu'elle avoit, & qui fit continuer la peſte qui ravageoit l'Attique, juſqu'à ce qu'on l'eut ſatisfaite. *Eratoſtenes* donne à ce problême célebre une origine moins brillante. Un certain tragique, dit-il, avoit introduit ſur la ſcene *Minos* élevant un monument à *Glaucus*, ſes entrepreneurs lui donnoient cent palmes en tous ſens; mais le Prince, ſur l'inſpection de l'ouvrage, qui ne répondoit pas à ſa magnificence, ordonnoit qu'on le fît double: de là, ajoute-t-il, quelques-uns prirent ſujet de demander aux Géometres comment ils exécuteroient une pareille volonté? Ils tenterent la queſtion de bien des manieres, tâchant de conſtruire un cube double d'un autre, juſqu'au

tems d'*Hippocrate*, qui leur enſeigna qu'elle ſe réduiſoit à l'invention des deux moyennes proportionnelles continues. Dans la ſuite l'oracle de *Delphes* ayant demandé qu'on doublât l'autel du dieu qui y préſidoit, les entrepreneurs voulant exécuter cet ordre, furent obligés de conſulter l'école platonicienne, qui faiſoit une étude ſpéciale de la Géométrie. Telle eſt ſuivant *Eratoſtenes*, la maniere dont le problême de la duplication du cercle ſe préſenta la premiere fois aux Géometres, & dont il leur fut propoſé de nouveau, après en avoir été, ce ſemble, oublié pendant quelque tems.

Mais quelle que ſoit l'occaſion qui les engagea dans cette recherche, il eſt certain qu'elle avoit acquiſe une grande célébrité dès le tems de *Platon*. *Valere Maxime* raconte au reſte un trait fabuleux, quand il dit que ce Philoſophe renvoya à *Euclide* les députés qu'on lui avoit adreſſés, comme au plus habile

Géometre de la Grece ; comment cela pourroit-il se soutenir, puisqu'il est certain qu'*Euclide* le Géometre ne florissoit qu'un demi-siécle après *Platon*, & que le Philosophe de *Megare* qui porta le même nom, ne s'occupoit que de sophismes ? Quelques-uns ont soupçonné qu'il falloit lire *Eudoxe* ; il est je crois plus sûr de traiter toute l'histoire de fable.

IV. L'école platonicienne fournit plusieurs solutions du problême de la duplication du cube. Platon en donna d'abord une fort simple, & qui n'employe que les moyens de la Géométrie élémentaire ; il est vrai qu'elle exige un tâtonnement, & l'usage de quelque instrument autre que la régle & le compas, ce qui n'est point admis dans la rigueur géométrique. Ce défaut que le chef des Géometres ne chercha pas à éviter, nous donne lieu de penser qu'il n'eut en vûe que la facilité de l'exécution, & qu'il sacrifia à cet avantage réel une dé-

licatesse superflue. Voici en substance le procédé de Platon. Si l'on a deux triangles rectangles, comme *ACD*, *CDE* (*fig.* 25.) appuyés sur les deux bases perpendiculaires l'une à l'autre *AD*, *CE*, les lignes *AB*, *BC*, *BD*, *BE* sont en proportion continue. Ayant donc disposé *AB*, *BE*, les deux extrêmes données à angles droits, il s'agit de tirer des points *A*, *E* les paralleles *AC*, *ED* jusques aux prolongemens de *AB*, *CB*, & de faire qu'en même temps les deux angles en *C* & *D* soient droits. Pour exécuter cela avec plus de facilité, Platon imagina un instrument composé d'une base & de deux coulisses perpendiculaires, entre lesquelles s'avançoit une régle mobile, qui par là restoit toujours parallele à la base. Je n'en donne point la figure, parce que cette construction est assez simple pour qu'on la concoive aisément sans ce secours. Cet instrument servoit à trouver à la fois les points *C*, *D* : pour cet effet

on écartoit la régle mobile de la base, & l'on faisoit ensorte que les points *A*, *E*, étant dans ces deux paralleles, les lignes *ABD*, *EBC* passassent par les angles de ces paralleles avec l'une des coulisses latérales. Par ce moyen les angles *C*, *D* étoient droits, & en même tems les lignes *AC*, *ED* paralleles, ce qui résolvoit le problême. Quelques-uns variant la construction de *Platon*, se servirent de deux équerres mobiles *ACD*, *CDE*, qu'on disposoit de maniere que le point *A* étant dans le côté *AC*, & les lignes *BC*, *BD* passant par *C* & *D*, les angles des équerres, le côté *DE* rencontrât le point *E*. Ce dernier procédé a fourni à un analyste du seizième siécle (*Raphael Bombelli*) l'idée de construire par une voie semblable toutes les équations des troisiéme & quatriéme dégrés, ce qu'il exécute fort ingénieusement.

V. La solution donnée par *Platon* a, comme on voit, le défaut de ne pouvoir

être avouée par la Géométrie; elle eſt à la vérité commode dans l'exécution, mais elle bleſſe la rigueur dont cette ſcience ſe fait gloire. *Architas* en donna une autre qui a un défaut tout à fait contraire; celle-ci eſt uniquement intellectuelle, d'ailleurs elle eſt fort ſatisfaiſante pour l'eſprit, & l'on peut en concevoir une idée avantageuſe du génie de ſon inventeur. Afin d'abréger je me contenterai de l'indiquer. *Architas* imagine ſur la ſurface d'un cylindre droit une ligne courbe, décrite par l'interſection continuelle de cette ſurface, avec la circonférence d'un demi-cercle qui ſe meut d'une certaine maniere; enſuite il fait rencontrer cette ligne courbe par une ſurface conique, ce qui donne un point d'où dépend la ſolution du problême. Au reſte, comme je l'ai déja dit, quelqu'ingénieux que ſoit ce procédé, il eſt tout pour l'eſprit, la pratique n'en ſçauroit tirer aucun ſecours.

VI. Ceux qui connoiſſent peu l'ancienne Géométrie, ſe perſuadent ordinairement que la vraie ſolution de ce problême eſt d'une date moderne, & que *Deſcartes* en a le premier dévoilé le principe. Il eſt vrai qu'il l'a beaucoup perfectionnée, mais les Anciens l'avoient déja ébauchée dès le tems de *Platon*. Nous avons deux ſolutions d'un Géometre contemporain, & diſciple de ce Philoſophe, qui employent les ſections coniques; dans l'une ce ſont deux paraboles, dans l'autre une hyperbole entre les aſymptotes combinée avec une parabole; ce Géometre eſt *Menechme*, frere de *Dinoſtrate*, à qui un vers d'*Eratoſtenes* ſemble attribuer l'invention des ſections coniques: ſes deux ſolutions ſont trop remarquables pour ne les pas rapporter ici, je les expoſerai en ſuivant la méthode analytique dont il ſe ſervit apparemment pour y parvenir.

Je ſuppoſe que les extrêmes données ſoient *A* & *D*, & les deux moyennes

cherchées *B* & *C*; le quarré de *B* sera donc égal au rectangle de $A \times C$, à cause de la proportion continue qui régne entre *A*, *B*, *C*; par conséquent la ligne *B* sera l'ordonnée d'une parabole, dont *A* est le parametre & *C* l'abcisse. Soit donc décrite sur l'axe *AC* indéterminée, une parabole *ABb* (*fig.* 26.), les lignes *BC* seront quelques-unes des coordonnées *BC*, *AC*, ou *bc*, *Ac*, ou &c. mais *B*, *C* & *D* étant continuement proportionnelles, le quarré de *C* doit être égal au rectangle de $B \times D$, ou l'abcisse *AC* cherchée de la premiere parabole doit être telle que son quarré soit égal au rectangle de *BC*, par la seconde des extrêmes données. *AC* étant donc encore considérée comme abcisse, *BC* sera l'ordonnée d'une parabole extérieure *ABb*, dont la propriété est, comme l'on sçait, d'avoir les quarrés de ses abcisses constamment égaux aux rectangles de ses ordonnées par une ligne constante; au reste cette parabole

extérieure n'eſt que la parabole ordinaire décrite ſur un axe *A D*, perpendiculaire au premier. Ainſi l'interſection de ces deux paraboles donnera la ſolution deſirée, puiſque par ce moyen *B C*, comme ordonnée de la premiere parabole *A B b*, ſera telle que *A* : *B C* :: *B C* : *A C*; & qu'en vertu de la ſeconde *A B b*, on a *B C* ou *A D* : *B D* :: *B D* ou *A C* : *D*; d'où il eſt manifeſte que *A*, *B C*, *A C* & *D* ſont en proportion continue.

Une analyſe facile conduit de même à la ſeconde ſolution de *Menechme*; car puiſque les quatre lignes *A*, *B*, *C*, *D*, ſont en proportion, le rectangle de *B* × *C* eſt égal au rectangle conſtant & donné de *A* × *D*. Les lignes cherchées *B*, *C*, ſont donc les coordonnées d'une hyperbole entre les aſymptotes *O D I*, où les rectangles, comme *C I A B*, *c i a B*, ſont tous égaux entr'eux & au rectangle de *A* × *D*. Or à cauſe de la proportion continue, le quarré de *B* eſt égal au

rectangle de $C \times A$: d'où il suit que B est l'ordonnée d'une parabole dont le parametre est A, & l'abcisse C. Ayant donc pris BA pour axe, on voit que décrivant la parabole dont le parametre est A, elle coupera l'hyperbole à l'endroit cherché D, qui donnera les deux moyennes ED, BE. En effet à cause de la parabole $A : ED :: ED : BE$, & ces mêmes lignes ED, BE appartenant à l'hyperbole, donnent $ED \times BE = A \times D$, c'est-à-dire $A : ED : BE : D$; d'où se conclut aisément la proportion continue.

Quoique j'aie donné des éloges à ces deux solutions, je n'ignore cependant pas qu'elles ont un défaut assez considérable, défaut qui n'a pas échappé aux Anciens même. Il consiste en ce qu'elles employent deux sections coniques, tandis qu'une seule combinée avec un cercle pouvoit suffire. C'est en quoi les *Descartes*, les *Sluses*, &c. ont beaucoup perfectionné la méthode des

lieux géométriques. Les Anciens employoient ordinairement les premiers qui se présentoient, & ce n'étoient pas toujours les plus simples ; les Modernes ont enseigné à choisir les plus commodes : mais cela doit peu diminuer le mérite de l'Auteur de cette ingénieuse invention ; auroit-on droit d'attendre qu'il lui eût donné tout à coup la perfection dont elle étoit susceptible ? La Géométrie ancienne nous en fournit d'autres exemples où il n'y a rien de pareil à redire.

VII. *Eudoxe* de *Cnide* fut un des Géometres contemporains de *Platon*, qui travaillerent à la duplication du cube ; il ne reste plus de traces de sa solution, graces à la mauvaise humeur d'*Eutocius*, (*a*) qui la déprime fort & nous la represente comme pitoyable. Cependant on en pensera bien autrement si l'on a quelqu'égard au témoignage

(*a*) *Comm. in Archimed. de sphæra & cylindro.*

d'*Eratoſtenes* (*a*), qui en parle avec autant d'éloge qu'Eutocius affecte de mépris pour elle, & le jugement de ce Philoſophe & Géometre célébre doit l'emporter ſur celui du commentateur d'*Archimede*, venu près de dix ſiécles après *Eudoxe*, & qui n'a peut-être vû qu'un manuſcrit altéré. Cet endroit d'*Eratoſtenes* nous apprend que le Géometre de Cnide avoit imaginé certaines courbes particulieres pour la réſolution de ce problême, & que ces courbes étoient différentes des ſections coniques, puiſqu'il parle plus haut de ces dernieres au ſujet de *Menechme*. Les courbes inventées par Eudoxe avoient probablement de la reſſemblance avec celles que le même motif a fait imaginer à divers Géometres, tels que le Pere *Griemberger* (*b*), *Renaldini* (*c*), qui nomme les ſiennes *Mediceæ*, comme

(*a*) *Ibidem.*

(*b*) *Villalpandi, deſcriptio templi Salomonis.*

(*c*) *De reſolutione & comp. mathem.* tom. 3.

ſi une Maiſon illuſtre avoit à tirer quelque nouvel éclat d'une courbe géométrique; *Barrow* (*a*), qui fort ſagement ne donne aucun nom aux ſiennes, &c.

VIII. Le problême des deux moyennes proportionnelles continua d'être un ſujet ſur lequel s'exercerent les plus habiles Géometres. *Eratoſtenes*, dont nous avons parlé ſi ſouvent, le réſolut par une voie nouvelle, & qu'il eſt aiſé d'appliquer à trouver tant de moyennes proportionnelles qu'on voudra; il n'y employe que des lignes droites, auſſi eſt-il obligé de recourir à un inſtrument autre que la régle & le compas. Celui qu'il propoſe eſt compoſé de pluſieurs planchettes mobiles, qui coulent les unes ſur les autres parallelement à elles-mêmes: je ne le décris pas afin d'abreger, on peut le voir dans *Eutocius* ou dans *Pappus* (*b*). *Eratoſtenes* écrivit ſur cela un petit traité intitulé *Meſolabium*,

(*a*) *Lectiones Geometricæ.*
(*b*) *Collectiones Mathem.* l. 3.

qu'il adreſſa au Roi *Ptolomée*, & qu'*Eutocius* nous a conſervé, de même que les vers par leſquels il célébra ſon invention. Ces vers cependant ne la préſerverent pas des railleries de *Nicomede*; celui-ci s'en mocquoit comme d'une choſe qui n'étoit ni trop ſubtile ni trop conforme à l'eſprit de la Géométrie; mais il y a un peu trop de rigueur dans cette critique. La ſolution d'*Eratoſtenes*, quoique méchanique, ne laiſſe pas d'être aſſez ingénieuſe.

IX. Après ces ſolutions viennent celles d'*Appollonius*, d'*Heron* d'*Alexandrie* & de *Philon* de *Byzance*; je les joins enſemble, parce qu'elles ne ſont proprement que la même, variée au gré de ces Géometres. Suivant l'un d'eux, après avoir fait des deux lignes données *A C*, *C B* le rectangle *A B* (*fig.* 28), & partagé la diagonale *A B* en deux également en *R*, il faut décrire de ce point un arc de cercle *GIF*, tel que la ligne *G F* menée par ſes interſec-

tions *G*, *F* avec les côtés *C A*, *C B* prolongés passe par l'angle *D*; alors les lignes *B F*, *A G* sont les moyennes qu'on cherche. Cette construction revient à celle de décrire sur la ligne *A B* un demi-cercle, & de tirer *F D G*, de sorte que les segmens *F E*, *D G* soient égaux : on peut satisfaire en tâtonnant, à ces conditions, & ainsi le faisoit *Philon* de *Byzance*, & *Appollonius* même, au rapport du commentateur d'*Archimede*. Cet écrivain attribue à *Heron* d'Alexandrie, une solution rigoureusement géométrique, par le moyen de l'hyperbole. Ce Géometre en décrivoit une par le point *D*, entre les asymptotes *C A*, *C B*; & son intersection avec le demi-cercle *A D B* déterminoit le point *E*, par lequel il falloit mener la ligne *F D G*. Cette solution, il faut le remarquer, est une des plus simples & des plus élégantes; mais on doit en faire honneur à *Appollonius*. Je me fonde en pensant ainsi, sur le témoignage de

Pappus (*a*), qui dit qu'*Appollonius* résolut le problême par les sections coniques, & qui attribue à *Heron* celle qu'*Eutocius* donne à cet autre : l'ouvrage d'*Heron* sur les machines de guerre, confirme le rapport de *Pappus*.

X. De toutes les solutions anciennes du problême de la duplication du cube, celle de *Nicomede* est une des plus ingénieuses (*b*) ; ce Géometre le réduisit par une analyse très-subtile, à celui d'insérer dans un angle comme *a D b*, une ligne droite de grandeur donnée,

(*a*) *Collect. Mathem.* l. 3. p. 4.

(*b*) Nicomede étoit un Géometre dont l'âge paroît devoir être fixé vers le second siécle avant J. C. car on sçait d'abord qu'il étoit postérieur à *Eratostenes*, qui fleurit dans le cours du troisiéme, puisque, suivant *Eutocius*, il se mocquoit de sa solution. D'un autre côté *Proclus* nous assure qu'il fut l'inventeur des conchoïdes, sur lesquelles *Geminus*, contemporain ou peu postérieur à *Hipparque*, écrivit au long dans ses *Enarrationes Geometricæ* que nous n'avons plus ; ces deux circonstances fixent l'âge du Géometre dont nous parlons, entre *Eratostenes* & *Hipparque*, à peu près vers l'an 180 avant l'ere chrétienne.

qui étant prolongée passe par un point assigné *P* ; & comme cela ne se peut exécuter généralement par la Géométrie plane, il imagina pour y suppléer sa conchoïde, avec un instrument propre à la décrire par un mouvement continu. La propriété de cette ligne *aAa* (*fig.* 29.) est telle que *bBb* étant son axe, toutes les lignes *AB*, *ab*, *ab* tirées des points de la courbe vers le pole *P*, sont égales entr'elles. La figure 30 représente l'instrument dont la construction est assez aisée à appercevoir pour m'en épargner l'explication. On voit facilement que cette ligne est propre par sa génération, à satisfaire au problême auquel *Nicomede* rappelloit celui des deux moyennes proportionnelles ; car soit un angle *aDb*, où il s'agit d'insérer la ligne *ab*, donnée de grandeur & de sorte qu'étant prolongée, elle passe par le point *P* : qu'on décrive sur l'axe *bDBb*, &c, une conchoïde dont le pole soit *P*, son intersection

avec le côté *D a* donnera évidemment le point *a*; d'où doit être tirée la ligne *a b* vers le point *P*.

Cette conſtruction préliminaire étant ſuppoſée, voici comment *Nicomede* réſolvoit le problême des moyennes proportionnelles. Il faiſoit d'abord un rectangle des lignes données *A C*, *C B*, & il les diviſoit chacune en deux également aux points *I*, *L*; il menoit enſuite la ligne *D I H*, & ayant élévé la perpendiculaire *L K*, telle que *B K* fût égale à *C I*, il tiroit *K H*, & ſa parallele *B S*; c'étoit dans l'angle *F B S* qu'il falloit adapter la ligne *S F* égale à *C I* & paſſant par *K*, ce qui déterminoit le point *F*; de ſorte qu'en tirant *F D G*, les lignes *B F*, *A G* étoient les moyennes cherchées.

A l'égard de la démonſtration, il donnoit la ſuivante. J'ai crû devoir la rapporter ici, parce qu'elle eſt aſſez compoſée pour ne pas ſe préſenter facilement, même à des Géometres habiles.

La ligne BC, difoit-il, étant partagée en deux également au point L, donne le rectangle de $BF \times FC$, plus le quarré de BL égal au quarré de FL : ajoûtant donc de part & d'autre le quarré de LK, on a $CF \times BF + LB^2 + LK^2$, ou $CF \times BF + BK^2 = LF^2 + LK^2 = KF^2$; mais $GA : AC :: BC : BF$: donc $GA : \frac{1}{2} AC$ ou $AI :: 2 BC$ ou $BH : BF$. Conféquemment en compofant, $GI : AI :: HF : BF :: KF : SF$, d'où il fuit que GI eft égal à KF, puifque AI eft égal à SF. Maintenant $GI^2 = CG \times GA + AI^2$; donc $CG \times GA + AI^2 = CF \times BF + BK^2$; parce qu'on a montré plus haut que ces derniers rectangles étoient égaux à KF^2 : donc ôtant ce qu'ils ont de commun, fçavoir, AI^2 & BK^2, égaux par la conftruction, reftera $CG \times GA = CF \times BF$; d'où l'on tire la proportion $CG : CF :: BF : GA$: or $CG : CF :: DB$ ou $AC : BF$: donc $AC : BF :: BF : GA$; mais $AC : BF :: GA : AD$;

par conséquent ces quatre lignes sont en proportion continue.

Cette démonstration fait voir la raison du procédé d'*Appollonius*, d'*Heron* & de *Philon*; ils avoient réduit le problême à faire ensorte que $CG \times GA$ fût égal à $CF \times BF$: or en décrivant un cercle $ADBC$, le premier de ces rectangles est égal à $GE \times GD$, & le second à $FD \times FE$; il falloit donc que ces derniers fussent égaux, ce qui arrivera quand GD & EF seront égales, & que demandoient en effet *Philon* & *Heron* d'*Alexandrie* : l'autre construction attribuée à *Appollonius*, suit assez visiblement de celle-ci, pour me dispenser d'une explication.

La solution de *Nicomede* a l'avantage de réduire précisément à la même difficulté l'invention des deux moyennes proportionnelles & la trisection de l'angle; il est fort vraisemblable que ce fut l'objet qu'il se proposa, ou le hazard le servit bien heureusement : quoiqu'il

en ſoit, comme l'on a montré depuis que toutes les équations des troiſiéme & quatriéme degré ſe réduiſent à ces deux problêmes, on voit déja que la conchoïde peut ſervir à les conſtruire avec la plus grande facilité. *Viete* en avoit fait la remarque; mais perſonne n'en a tiré meilleur parti que M. *Newton*. Cet illuſtre Géometre a donné pour chaque forme d'équation du troiſiéme degré, la poſition du pole, & la grandeur de l'angle & de la ligne à y inférer. D'un avis différent de *Deſcartes*, dont il diſcute les motifs de préférence pour les ſections coniques, il établit que la conchoïde eſt la courbe la plus commode pour conſtruire les équations ſolides; les raiſons que M. *Newton* en apporte dans ſon *Arithm. univerſ.* méritent d'être conſidérées.

XI. Il ne reſte preſque plus à parler que de la ſolution de *Diocles* (*a*); celle-

(*a*) *Diocles* eſt un Géometre dont l'âge n'eſt point connu. Je conjecture néanmoins qu'il

ci eſt encore une des plus remarquables. A l'imitation de *Nicomede*, ce Géometre imagina une courbe particuliere, ſçavoir, celle que nous appellons aujourd'hui la cyſſoïde, nom qui, pour le remarquer en paſſant, paroît avoir été commun à une claſſe entiere de courbes chez les Géometres anciens.

Pappus que je crois antérieur à *Diocles*, avoit réduit le problême des deux moyennes proportionnelles à la conſtruction ſuivante. Ayant diſpoſé à angles droits les lignes *DC*, *CL*, & tiré *DLO* (*fig.* 31.), il décrivoit du centre *C* le demi-cercle *ABD*; après quoi il s'agiſſoit de trouver ſur la prolongation de *DL* un point *G*, tel que menant la ligne *AGH*, les ſegmens *GO*,

vivoit plus tard que *Pappus*, qui eſt du quatriéme ſiecle, & je me fonde ſur le ſilence de cet écrivain, qui ne dit rien de ſa ſolution, quoiqu'il employe le même principe. *Eutocius* qui vivoit vers l'an 540, cite *Diocles* & ſon livre *de Pyriis*, des machines à feu; ce qui donne lieu de croire qu'il étoit un Ingénieur.

O H fussent égaux. La ligne *C O* étoit la premiere des moyennes cherchées; en voici la démonstration, qui nous donnera en même tems la propriété principale de la cyssoïde.

Les lignes *G O*; *O H* étant égales, il est évident que *C F*, *C K* le seront aussi, & par conséquent *K H* & *F E* : or *A K* : *K H* ou *F E* : : *A F* : *F G*; & d'un autre côté, à cause des triangles semblables, *H K D*, *A K H*, *A G F*, *K H* : *K D* ou *E F* : : *A F*, *A F* : *F G*. Donc *F E*, *A F*, *F G* sont en proportion continue; par conséquent les quatre lignes *A K* ou *D F* : *F E* *A F*, *F G* sont continuement proportionnelles, & *F E*, la premiere des deux moyennes entre *A K* ou *D F* & *F G*; mais comme c'est entre *C D*, *C L* qu'on cherche les moyennes proportionnelles, & que ces deux lignes sont en même raison que *D F*, *F G*, il s'ensuit qu'ayant trouvé la premiere des moyennes entre ces dernieres, il n'y aura plus qu'une simple analogie à faire

pour déterminer celle qui convient à *C D*, sçavoir celle-ci, comme *D F* à *F E*, ou *A K* à *K H*; ainsi *C D* ou *A C* à *C O*: par conséquent *C O* est la premiere des moyennes cherchées.

On voit donc que dans toutes les différentes positions de la ligne *D L F*, ou de *A F H*, le point *G* qui résoud le problême, est tellement situé, que *GO* = *O H*. De là *Diocles* prit occasion de décrire la courbe où se trouvent tous ces points, au lieu de les chercher méchaniquement. Alors la premiere propriété de cette courbe est, qu'ayant tiré une ordonnée quelconque *E G F*, les lignes *D F*, *F E*, *A F*, *F G* sont en proportion continue. Il est aisé d'en faire l'application au problême des deux moyennes; car ayant mis les extrêmes à angles droits comme ci-dessus, décrit le cercle *A B D*, & la cyssoïde *A g G B*, la ligne *D L* prolongée la rencontre en *G*; d'où tirant *A G H*, qui coupe *C B* en *O*, la ligne *C O* est la

premiere des moyennes. La construction de *Sporus* differe si peu de celles de *Pappus* & de *Diocles*, qu'on a lieu de s'étonner qu'*Eutocius* ait pris la peine de la developper au long ; elle ne méritoit pas ce détail.

Je ne dois pas omettre une remarque qui releve beaucoup la solution de *Diocles* ; c'est qu'on peut décrire sa cyssoïde par un mouvement continu. M. *Newton* en a donné le moyen, & il ne faut pour cela qu'une simple équerre. Le point *P* éloigné de l'axe *C R* de la quantité du diametre *A D* ayant été pris pour pole, qu'on ait une équerre dont le petit côté soit égal à *A D*, & l'autre indéfini ; si on la fait mouvoir de maniere que ce dernier côté étant appliqué au point *P*, l'extrémité du petit côté *R* coule le long de l'axe ou régle *C R* ; le point *s* qui le partage en deux également, décrira la cyssoïde.

XII. Le problême de la trisection de l'angle est de la même nature que le

précédent ; ſon affinité avec lui m'engage à expoſer d'abord les ſolutions qu'il reçut dans l'antiquité ; je viendrai enſuite aux recherches que l'un & l'autre ont occaſionnées parmi les Modernes.

Les premiers moyens qui ſe préſentent pour parvenir à la triſection de l'angle, ſont les ſuivans, & ils ſont ſi naturels qu'il eſt à préſumer qu'ils ne furent pas long tems ignorés des Anciens. Si *B A C* (*fig* 32) eſt l'angle propoſé, après avoir abaiſſé la perpendiculaire *B C*, formé le parallelogramme *C G* & prolongé *C A* indéfiniment, il s'agit de tirer la ligne *B D E* de telle maniere que la partie *D E* ſoit égale à deux fois la diagonale *A B* ; alors l'angle *D A C* eſt le tiers de *B A C*. Les Géometres les moins verſés ſont en état d'en appercevoir auſſi-tôt la démonſtration. Il étoit encore aiſé de remarquer, que ſi d'un point *C* du demi-cercle *A C D* (*fig* 33) on tire *C D E*, de ſorte que la partie *D E* interceptée entre la cir-

conférence & le diametre prolongé, soit égale au rayon, on aura encore l'angle *DEF* égal au tiers de *ABC*.

On s'obstina sans doute long-tems à chercher la solution de l'un & de l'autre de ces problêmes par la Géométrie ordinaire, avant que de s'appercevoir qu'ils étoient d'une difficulté supérieure aux moyens que fournit cette Géométrie. Après un grand nombre de tentatives infructueuses, ou qui n'avoient produit que des paralogismes, on se tourna enfin du côté des sections coniques & de diverses autres courbes. *Pappus* (*a*) nous rapporte la maniere ingénieuse dont quelques Géometres employerent l'hyperbole pour résoudre le premier de ces problêmes auxquels on avoit réduit celui de la trisection. Je vais l'expliquer en employant l'analyse qui servit à la trouver.

Que *DE* soit la ligne cherchée, & que l'on acheve le parallelogramme

(*a*) *Coll. Mathem. l.* 4. *prop.* 31, 32.

GDEF.

GDEF, on voit d'abord que $EC : CB :: BG : GD$ ou EF; conſéquemment $EF \times EB = AC \times CB$; d'où il ſuit que le point *F* eſt dans une hyperbole entre les aſymptotes *CH*, *CE*, & paſſant par le point *G* ; mais *DE* eſt donnée de grandeur, par conſéquent auſſi ſon égale *GF* ; ce qui fait voir que le point *F* eſt auſſi dans la circonférence d'un cercle, dont *C* eſt le centre & *CF* le rayon ; il eſt donc dans l'interſection commune de l'hyperbole & du cercle : ce qui le rend aiſé à déterminer, puiſqu'il n'y a qu'à décrire une hyperbole par le point *G*, entre les aſymptotes *CE*, *CH*, & tracer un cercle du centre *C* au rayon *CF* égal à 2 *AB* ; le point où ces deux courbes ſe couperont, ſera tel qu'abaiſſant l'ordonnée *FE*, on aura le point *E* qu'on cherche & la poſition de la ligne *DE*.

On peut exécuter la même choſe par le moyen de la conchoïde ; car il eſt évident que celle qu'on décrira du pole

P, avec les ordonnées convergentes à ce pole de la longueur qu'on demande, coupera la ligne *CE* au point cherché; ainſi cette courbe ſert également à réſoudre le problême de la triſection & celui des deux moyennes proportionnelles.

A l'égard de la ſeconde conſtruction que repréſente la figure 33, on y ſatisfera auſſi aiſément en employant une conchoïde, non pas à la vérité celle dont on vient de parler, que les Anciens nommoient la *premiere*; mais la *ſeconde*, qui ſe décrit au deſſous de l'axe, au lieu que l'autre eſt décrite au deſſus. Il eſt à propos de remarquer ici qu'on ne doit point regarder ces deux conchoïdes comme des courbes différentes; elles ſont les deux branches de la même courbe: c'eſt ainſi que les hyperboles oppoſées forment enſemble l'hyperbole entiere, avec cette différence que ces dernieres s'éloignent de plus en plus de leur axe commun, au

lieu que les branches de la conchoïde s'en approchent de plus en plus.

XIII. Les Anciens donnerent une autre ſolution du problême de la triſection de l'angle, où ils employerent l'hyperbole d'une maniere différente de celle qu'on a fait connoître un peu plus haut ; c'eſt encore *Pappus* (*a*) qui la rapporte : elle eſt ſi élégante qu'elle mérite qu'on en faſſe mention ; c'eſt une ſuite de cette belle propriété de l'hyperbole décrite entre des aſymptotes, faiſant un angle de 120° ; ſçavoir, que prenant ſur ſon axe une abciſſe *B A*, égale à la moitié de l'axe tranſverſe *D B* (*fig.* 34.), & tirant de ce point *A* & de l'autre extrémité de l'axe *D*, deux lignes à un point quelconque *E*, l'angle *E A D* eſt toujours double de *E D A* ; par conſéquent ſi l'on décrit ſur la ligne *D A* un arc quelconque, la partie *A E* en ſera le tiers. Il eſt aiſé de faire l'application de ceci à partager en trois éga-

(*a*) *Coll. Mathem. l.* 4. *prop.* 34.

lement un angle ou un arc quelconque ; il n'y aura qu'à décrire ſur la ligne *D A* l'arc qui meſure l'angle donné *D C A*, alors *E C A* en ſera le tiers.

Il y a ici une particularité digne d'être obſervée ; c'eſt que non ſeulement la même hyperbole retranche l'arc *A S*, égal au tiers de *A S D*, le reſtant du premier au cercle, mais que l'hyperbole oppoſée coupe le même arc dans un point *E*, tel que l'arc *A C E* eſt le tiers de la circonférence entiere augmentée du petit arc *A E D*. Les Anciens ne paroiſſent pas avoir fait cette derniere remarque, elle auroit pû les étonner. A l'égard des Modernes, ils n'y trouveront aucun ſujet de ſurpriſe ; ils ſçavent que le problême conduit néceſſairement à une conſtruction qui doit donner trois valeurs différentes à la corde cherchée.

XIV. Pluſieurs courbes que les Anciens conſidérerent, ſemblent avoir été imaginées dans la vûe de ſervir à ce

problême, du moins envisagé d'une maniere plus générale : telles sont la quadratrice & la spirale, dont la premiere n'a pas une date moins reculée que *Platon*. En effet, *Dinostrate* son inventeur, étoit un des Géometres de l'école platonicienne. On sçait que cette courbe est formée par l'intersection continuelle d'un rayon qui se meut d'un mouvement angulaire, & qui parcourt le quart de cercle, tandis qu'une ligne toujours parallele à elle-même, partant d'un même terme, se meut de la hauteur du rayon; ainsi le mouvement angulaire de ce rayon est toujours mesuré par une ligne droite, ce qui fait qu'il est toujours facile de le diviser, non seulement en parties égales, mais encore suivant un rapport quelconque donné, fût-il irrationnel; il ne faudra pour cet effet que diviser cette ligne droite de la même maniere, ensuite tirer les rayons par les points de la quadratrice qui répondent aux points de

division sur l'axe. La spirale ordinaire a évidemment la même propriété; c'est aussi une suite de sa génération. Toutes les courbes enfin qui sont décrites par une combinaison de mouvemens rectilignes & circulaires, courbes dont la Géométrie moderne présente un grand nombre, jouissent du même avantage: mais il est à remarquer que ces courbes ne résolvent le problême que par une espece de pétition de principe; il faut les supposer entierement décrites, & pour les décrire en entier, il faudroit avoir ou la Quadrature indéfinie du cercle, ou la solution du problême général de diviser un angle en raison quelconque; par conséquent les solutions qu'elles donnent ne sont que des spéculations, dont la pratique ne peut tirer tout au plus que des moyens d'approcher de la vérité.

XV. Les deux problêmes dont on vient de traiter l'histoire chez les Anciens, n'ont pas moins occupé les Mo-

dernes. Plusieurs de ces derniers se sont en effet exercés à en trouver de nouvelles solutions, dans le goût de celles qu'on vient de voir, c'est-à-dire dont les unes consistent dans quelque méchanisme commode & facile, les autres dans l'emploi de quelque courbe particuliere. M. *Viete* (*a*) en a proposé quelques-unes de la premiere espece, & après lui M. *Huygens* en a donné un assez grand nombre dans un ouvrage qu'il publioit fort jeune en 1654 (*b*). M. *Viviani* a construit ces problêmes de diverses manieres élégantes & nouvelles dans plusieurs ouvrages (*c*). Le P. *Griemberger* (*d*) a imaginé quelques courbes particulieres pour servir à la résolution du problême des deux moyen-

(*a*) *Suppl. Geom. Variorum de rebus math. respons. l. 8. c. 5.*

(*b*) *Illustrium quorumd. problem. constructiones.*

(*c*) *Divin. in Aristæum. Solutio. probl. D. Comiers.*

(*d*) *Templi Salom. descriptio Thomæ Villalpandi.*

nes proportionnelles, en quoi il a été imité par *Renaldini* (*a*) & *Barrow* (*b*). Comme la plupart de ces inventions, quoique belles & ingénieuſes dans la théorie, n'ont pas une utilité bien marquée, ou me conduiroient trop loin ſi j'entreprenois de les expliquer, je me contenterai de les avoir citées, afin de paſſer à ce que mon ſujet me préſente de plus intéreſſant.

Le P. *Ceva* (*c*) a propoſé un compas de triſection, qui eſt fondé ſur ceci. Soit l'angle *B A D* (*fig.* 35), & que les côtés *A B*, *A D*, *B C*, *D C*, de même que *C F*, *C E*, ſoient tous égaux entr'eux, l'angle *FCE* ſera triple de *BAD*, & ſi l'on continuoit cette progreſſion de lignes égales, on auroit des angles quintuples, ſeptuples du premier; ainſi la conſtruction de ce compas conſiſte en deux longues branches *F A*, *A E* mo-

(*a*) *De reſol. & comp. Mathem. t.* 3.
(*b*) *Lectiones Geom.*
(*c*) *Act. Erud. ann.* 1695.

biles, auxquelles ſont attachées par des charnieres *BF*, *DE*, les petits côtés qui ſe meuvent ſur une charniere commune en *C*. On a revendiqué dans les mêmes Journaux, un inſtrument tout à fait ſemblable à M. *Tchirnauſen.*

XVI. Quoique les Anciens paroiſſent avoir réſolu ces deux problêmes autant qu'ils peuvent l'être, puiſque ne pouvant les conſtruire que par des courbes d'un genre ſupérieur au cercle, ils y ont employé les ſections coniques, la conchoïde &c. de diverſes manieres très-ingénieuſes; cependant on peut dire que ce n'eſt qu'à la Géométrie moderne qu'eſt dûe leur ſolution complette. Ce ſont en effet ſeulement les lumieres qu'elle nous fournit, qui nous mettent en état de faire voir qu'ils ſont d'une nature à ne pouvoir être généralement réſolus par la Géométrie plane, ce qui étoit un point néceſſaire à démontrer avant de ceſſer ſes efforts pour y parvenir par cette voye; mais l'analyſe mo-

derne leve tout doute à cet égard. D'ailleurs ce que les Anciens ont donné ſur ce ſujet, comparé aux inventions des Géometres du dernier ſiécle, n'eſt qu'un foible jour à côté d'une grande lumiere. Nous ſommes aujourd'hui en poſſeſſion d'une méthode par laquelle on peut trouver d'une infinité de manieres la ſolution de ces problêmes, & de tous les autres de même eſpece.

Avant que d'aller plus loin, il eſt eſſentiel de démontrer ce que nous avons annoncé dans tant d'endroits, je veux dire l'impoſſibilité de conſtruire généralement ces problêmes, ſans employer de courbe plus composée que le cercle. Je vais donc tâcher de le faire avec toute la clarté dont pareil ſujet eſt ſuſceptible, afin que perſonne ne ſoit plus tenté d'en rechercher la ſolution par des voyes qui ne ſçauroient y conduire.

Cette impoſſibilité eſt fondée ſur la théorie des équations & la nature des

courbes géométriques; ainſi je ſuis obligé d'en rappeller quelques points en faveur de ceux à qui elles ne ſeroient pas aſſez préſentes. Le premier eſt que dans toute équation, la quantité inconnue doit être repréſentée par autant de valeurs différentes qu'il y a d'unités dans l'expoſant de ſa plus haute puiſſance : à la vérité il peut arriver que quelques-unes de ces valeurs ſoient imaginaires ; mais on examinera ce cas, & on fera voir qu'il ne nuit point aux conſéquences qu'on tire dans les autres.

Le ſecond principe eſt, qu'une équation ne ſe peut conſtruire géométriquement, c'eſt-à-dire par un procédé certain & qui n'eſt ſujet à aucun tâtonnement, qu'à l'aide de deux lignes qui ſe puiſſent couper en autant de points que le dégré de l'équation comprend d'unités ; en voici la raiſon. Conſtruire une équation, c'eſt aſſigner par une opération générale la valeur de l'inconnue qu'elle renferme ; conſéquemment

lorſque cette inconnue en aura pluſieurs, il faudra une conſtruction capable de les exprimer toutes également; car cette conſtruction n'en regarde pas plutôt l'une que l'autre, puiſque les donnés ſont les mêmes à leur égard, & que ce ſont eux ſeuls qui peuvent la modifier. Il faut donc que les lignes dont l'interſection doit réſoudre le problême, puiſſent s'entrecouper en autant de points qu'il admet de ſolutions différentes.

Ce qu'on vient de dire eſt d'une évidence ſuffiſante, lorſque l'équation propoſée a toutes ſes racines réelles; mais peut-être n'en trouvera-t-on pas autant dans le cas où elle aura des racines imaginaires. Comme il y a alors quelques valeurs de moins à déterminer, il ſemblera qu'il n'eſt pas néceſſaire d'employer des courbes capables de ſe couper en autant de points que s'il n'y en avoit aucune d'impoſſible.

Ce doute n'eſt pas deſtitué de fon-

dement ; il ſe diſſipera néanmoins quand on connoîtra quelle eſt la nature & l'emploi des valeurs imaginaires dans les équations : ces valeurs ne deviennent telles que parce que certains donnés du problême croiſſant ou diminuant ſelon les circonſtances, de réelles & inégales qu'elles étoient d'abord, elles ſont devenues égales, deux points d'interſections ſe confondant enſemble, & formant un point de contact ; & qu'enfin ce point de contact diſparoît lui-même, l'une des courbes ne touchant ni ne coupant plus l'autre dans cet endroit, de ſorte qu'il n'y a plus d'ordonnée. Cela montre que ces racines imaginaires ſont toute autre choſe qu'un *merum nihil*, & qu'elles ont une ſorte d'exiſtence, en ce qu'elles déſignent des interſections, que des limitations particulieres ont rendues impoſſibles : toutes les fois donc qu'il y en aura de cette eſpece dans une équation, il n'en faudra pas moins des courbes qui puiſ-

ſent s'entrecouper en autant de points que ſi toutes les racines étoient réelles ; afin que toutes les interſections qui auront lieu exprimant ces dernieres, celles qui viennent à manquer déſignent les imaginaires.

Après l'expoſition de ces principes, il eſt aiſé de montrer qu'il eſt impoſſible de conſtruire généralement les problêmes de la triſection de l'angle & des deux moyennes proportionnelles, par des lignes ſimples, comme la droite & la circulaire. Il eſt en effet viſible que l'équation qui convient au premier eſt néceſſairement du troiſiéme degré, puiſque c'eſt le cube de la ligne cherchée, qui égale un parallelipipede donné, & cette équation qui eſt de cette forme $x^3 = a^2 b$ (a & b étant les deux extrêmes), ſera toujours irréductible, à moins que b ne ſoit un tel multiple de a, que l'expoſant de ce multiple ait une racine cube, parce qu'alors

l'extraction de la racine cubique réussiroit.

A l'égard du second problême, il est pareillement nécessaire qu'il soit du troisiéme degré, & nous allons en convaincre par les remarques suivantes. Quand on propose de partager un arc *A B* en trois également, c'est la même question que si l'on demandoit d'inscrire dans un segment dont *A E* est la corde, un quadrilatere tel que *A B C D*, dont les trois côtés *A B*, *B D*, *D E* soient égaux; or ce problême est de telle nature qu'il est susceptible de trois cas qui conduisent absolument à la même équation; car tous les donnés & la maniere de les employer sont les mêmes, soit qu'il s'agisse d'inscrire ce quadrilatere dans le petit ou dans le grand segment (*fig.* 36, 37), & même lorsqu'il s'agira d'en inscrire un de la forme *abde* (*fig.* 36), dans le dernier, de sorte qu'on doit aboutir à la même expression. Comme je ne connois aucun livre qui démontre

cette vérité, je crois qu'il eſt à propos de le faire ici avec quelque détail, afin de ne laiſſer aucun doute à ce ſujet. Je pourrois ſans doute m'en diſpenſer ſi je n'écrivois que pour les Géometres habiles, mais il eſt des endroits dans cet ouvrage qui ſont particulierement deſtinés à l'inſtruction des plus médiocres.

Dans le premier cas, les triangles *ABC*, *BAF* ſont ſemblables, puiſque l'angle *B* eſt commun, & que l'angle *C* a pour meſure l'arc *AB*, tiers de *ABE*, tandis que l'angle *A* eſt appuyé ſur les deux tiers du même arc, & a ſon ſommet à la circonférence; ainſi $CA : AB :: AB : BF$. Ayant donc nommé le rayon r, $AE = b$, & AF ou $AB = x$, nous aurons $r : x :: x : \frac{xx}{r}$; enſuite tirant DL parallele à BC, on a $CD : DB :: DG$ ou $BF : LG$, à cauſe des triangles ſemblables CDB, DLG; c'eſt pourquoi $r : x :: \frac{x^2}{r} : \frac{x^3}{rr}$, qui eſt la valeur de LG; or $AE = AF +$

LF ou AB ou $DF + EL$ ou $EG - LG$, d'où l'on tire $b = 2x + \frac{rrx - x^3}{rr}$, ce qui donne l'équation $x^3 - 3rrx + rrb = 0$.

Qu'il s'agiſſe à préſent d'inſcrire un pareil quadrilatere dans le grand ſegment, on aura de même les triangles fab, acb ſemblables, de ſorte que $\frac{xx}{r}$ ſera encore ici la valeur de bf; de plus en tirant dl parallele à bf, on a les triangles ldg, fba équiangles; ce qui donne $dg : lg :: cb : bd$ ou $r : x :: \frac{x^2}{r} : \frac{x^3}{rr}$; ainſi $lg = \frac{x^3}{rr}$; enfin $Ca = af + fl - le$, c'eſt-à-dire $b = 2x - \frac{x^3}{rr} + x$, d'où vient l'équation $-rrb = x^3 - 3rrx$, ou comme ci-deſſus $x^3 - 3rrx + rrb = 0$.

Le troiſiéme cas nous fournira la même équation par une analyſe tout-à-fait ſemblable, pourvû que nous faſſions ici attention que la ligne EF ou af, ayant été nommée x, quand elle tomboit au dedans du cercle, on devra la nom-

mer $-x$, lorſqu'il faudra la prendre au dehors de D vers le côté oppoſé. Après cette obſervation dont la néceſſité eſt évidente pour tous ceux qui ſont un peu verſés dans l'analyſe, on remarquera que les triangles $\varkappa\beta\alpha$, $\beta\alpha\varphi$ ſont ſemblables, comme l'étoient leurs homologues dans les figures précédentes; ainſi $r : -x :: -x : \frac{xx}{r}$, qui eſt la valeur de $\beta\varphi$; & ayant tiré comme on a fait ci-devant $\delta\lambda$ parallele a $\beta\varphi$, on aura $\varphi\lambda = \beta\delta$ ou $\beta\alpha = -x$; par conſéquent $\alpha\lambda$ ſera $-2x$: de plus les triangles ſemblables & égaux $\gamma\varepsilon\delta$, $\alpha\beta\varphi$ donnent $\gamma\varepsilon = \alpha\varphi = -x$; enfin à cauſe des triangles $\beta\varkappa\delta$, $\gamma\delta\lambda$ on a $\beta\varkappa : \beta\delta :: \delta\lambda$ ou $\beta\varphi : \gamma\lambda$, c'eſt-à-dire, $r : x :: \frac{x^2}{r} : -\frac{x^3}{rr} = \gamma\lambda$; mais $\varepsilon\alpha = \gamma\lambda - \gamma\varepsilon - \alpha\lambda$ ou $\beta = -\frac{x^3}{rr} + 3x$, d'où nous aurons pour la troiſiéme fois $x^3 - 3rrx + rrb = 0$.

Si l'on propoſoit d'inſcrire un ſemblable quadrilatere dans le petit ſegment,

la réponſe ſeroit aiſée. Il eſt viſible du premier coup d'œil que cela eſt impoſſible, à moins que ce quadrilatere ne ſoit confondu avec *A E*, ou ſuppoſé en être infiniment voiſin, ce qui donneroit par la plus ſimple analyſe $x = b$; ainſi ce dernier cas ne conduit point à la même équation que les précédens, & par cette raiſon celle qui convient au problême de la triſection de l'angle eſt du troiſiéme dégré & ne le paſſe pas.

Qu'on ſe rappelle maintenant les principes qu'on a établis plus haut ; il eſt aiſé d'en faire l'application aux problêmes dont nous venons d'examiner la nature. Puiſque nous avons démontré qu'ils conduiſent néceſſairement à des équations du troiſiéme dégré ; il eſt évident qu'on ne peut les conſtruire en n'y employant que des courbes capables de donner moins de trois points d'interſection. Ceux qui tâchent de combiner des cercles & des lignes droites pour parvenir à cette ſolution, perdent in-

fructueuſement leur tems & leurs veilles.

On peut donner à cette démonſtration un tour qui la rendra encore plus propre à convaincre l'eſprit de cette impoſſibilité. Suppoſons que quelque voie particuliere eût conduit à conſtruire généralement le problême de la triſection de l'angle par la ſeule Géométrie élémentaire ; comme il eſt d'ailleurs démontré qu'il dépend d'une équation irréductible où la corde cherchée a trois valeurs inégales, on auroit la conſtruction de cette équation, & par conſéquemment même opération réſoudroit de la même maniere trois problêmes dont les ſolutions doivent être différentes. La Géométrie ſeroit donc ici en défaut, ce qui eſt abſurde; une ſcience fondée ſur des raiſonnemens dont la liaiſon eſt évidente & des principes certains, ne ſçauroient jamais conduire à l'erreur.

On objectera peut-être qu'il ne laiſſe pas d'y avoir des cas où l'on réuſſit par

la Géométrie plane à diviſer un arc en trois parties égales ; tels ſont ceux où l'on propoſe le cercle entier ou quelqu'une de ſes parties aliquotes pairement paires. Cette obſervation quoique vraie, ne détruit cependant pas ce que nous venons de dire ; il y a en effet quelques cas particuliers où la corde *b* a une telle valeur que l'équation peut être abaiſſée en la diviſant par une de ſes racines ; mais cette équation conſidérée généralement n'en eſt pas moins irréductible. C'eſt ainſi que la racine de $aa - xx$ ne peut être exprimée en termes finis, quoiqu'il ſoit poſſible quelquefois d'en extraire la racine exactement, ſçavoir, lorſque *a* & *x* ont des valeurs tellement combinées qu'elles repréſentent un quarré parfait.

XVII. *Deſcartes* a donné le premier des régles générales pour conſtruire les équations ſolides par une combinaiſon du cercle & des ſections coniques (*a*),

(*a*) *Geom. lib.* 3.

& il les a appliquées à la résolution des deux problêmes de la trisection & des deux moyennes proportionnelles. La maniere dont il les résoud est très-simple & mérite d'avoir place ici. Dans le cas des moyennes proportionnelles, les extrêmes étant *a* & *b*, il décrit une parabole au parametre *a*, & prend une abcisse DC sur l'axe égale à $\frac{1}{2}a$, après quoi il éleve une perpendiculaire sur le point C égale à $\frac{1}{2}b$; le cercle décrit par le point D comme centre, & passant par le sommet de la parabole, la coupe dans un autre point, dont l'ordonnée abaissée sur l'axe, est la premiere des moyennes cherchées, & l'abcisse qui lui répond est la seconde. S'il s'agit de diviser un arc en trois également, que *r* soit le rayon, *b* la corde de l'arc proposé, il décrit une parabole au parametre *r*; puis ayant pris sur l'axe une abcisse Ad égale à $2r$, il éleve la perpendiculaire de égale à $\frac{1}{2}b$; le cercle décrit du point *e*, comme centre, par le

ſommet de la parabole, la coupe en trois autres points G, g, γ, dont les trois ordonnées ſont les trois valeurs de la corde cherchée ; ſçavoir, GK la plus petite, la corde du tiers du petit arc ; gk la moyenne, celle du reſtant au cercle entier, & enfin la plus grande qui égale les deux autres priſes enſemble, eſt celle du tiers de la circonférence augmentée du petit arc.

Les Géometres qui ont ſuccédé à *Deſcartes*, marchant ſur ſes traces, ont beaucoup ajouté à ces inventions. M. de *Sluſe* eſt un des principaux : on lui doit d'avoir fait connoître le véritable principe de la conſtruction des équations par les lieux géométriques, & d'avoir enſeigné à les varier de pluſieurs manieres, en employant telle courbe qu'on voudra combinée avec telle autre. C'eſt là l'objet du ſçavant ouvrage (*a*) qu'il

(*a*) *Meſolabum, ſeu duæ mediæ proportionales per circulum & ellipſion. vel hyp. infinitis modis exibitæ*, in 4°. *Leodii*, 1654.

publia en 1654, où il résoud le problême de la duplication du cube d'une infinité de façons : cet ouvrage étoit écrit suivant le style des anciens Géometres, & à leur imitation son Auteur cachoit la méthode qui l'avoit conduit aux découvertes qu'il y exposoit ; il la dévoila seulement en 1668, suivant la promesse qu'il en avoit donnée dans la préface du traité dont on vient de parler (*a*). Je me livrerois volontiers à expliquer cette méthode si je ne craignois d'être trop long ; je me contenterai de renvoyer aux Auteurs sans nombre qui l'ont expliquée. M. *Wolf* sur tout l'a exposée avec beaucoup de précision & de netteté dans son cours de Mathématiques (*b*) ; il seroit à desirer, & pour l'avantage de ceux qui cherchent à s'initier dans ces sciences, & pour la réputation de son Auteur, que toutes les parties de ce cours répondissent à celle-là.

(*a*) *Mesolabum unâ cum adjunctis Miscel.*
(*b*) *Elem. analys.* T. I. chap. 7 & 8.

XVIII. Je ne puis mieux terminer le récit des travaux des Géometres sur les deux célebres problêmes qui nous ont occupé dans ce chapitre, qu'en exposant quelques unes des belles solutions que M. *Newton* en a données (*a*). J'ai déja dit ailleurs qu'il avoit fait voir, contre le sentiment de *Descartes*, que ce n'étoit pas le degré de composition des équations des courbes, mais uniquement le degré de facilité à les décrire qui devoit déterminer à faire usage des unes plutôt que des autres. Suivant ce principe, M. *Newton* employe la conchoïde à trouver les deux moyennes proportionnelles & la trisection de l'angle, & il le fait avec une élégance fort supérieure à celle des solutions du Géometre ancien, du moins dans le cas du premier de ces problêmes ; je vais mettre le Lecteur en état d'en juger. Les deux extrêmes données étant *a*, *b*, il

(*a*) *Arithm. univers. appendix de constructione equationum.*

prend (*fig* 40) $KA = a$, & après l'avoir partagée en deux également en C, il décrit du centre K une circonférence circulaire CX, &c. où il inſcrit $CX = b$; alors ſi l'on inſere dans l'angle EXY, la ligne EY convergente au point K & égale à $\frac{1}{2} a$, les quatre lignes KA, XY, KE, CX ſeront en proportion continue. A l'égard de la triſection de l'angle, la corde de l'arc propoſé (*fig.* 41.) étant CX, & CA le diametre, il ſuffit de prolonger indéfiniment AX, & d'adapter dans l'angle EXC, la ligne $EY = CA$, & convergente au centre K, l'arc XV ſera le tiers cherché. Cette derniere conſtruction revient, à la vérité, à celle de *Nicomede*; mais elle eſt une ſuite de la régle générale que *Newton* a établie plus haut pour la conſtruction de tous les problêmes de cet ordre : la premiere eſt également neuve & recommendable par ſa ſimplicité. M. *Newton* en donne un grand nombre d'autres dans le même

Ouvrage auquel je renvoye. Ce livre, quoique élémentaire, doit être entre les mains de tous les Géometres, comme étant marqué, ainsi que toutes les autres productions de ce grand homme, au coin de son génie, & d'ailleurs contenant des recherches & des questions qui ne sont pas au dessous des plus habiles en géométrie.

XIX. Il y eut dans l'antiquité, comme à présent, un grand nombre de prétendues solutions de ces deux problêmes par la Géométrie plane; *Pappus* (*a*) nous le dit d'une maniere expresse, & le commencement de son troisiéme livre des *Collections mathématiques*, est employé à réfuter une de ces solutions. Les autres tentatives de cette espece ont eu le sort qu'elles méritoient, & ne nous sont pas parvenues. Depuis le renouvellement des sciences parmi nous, les fausses duplications du cube ou trisections de l'angle, sont presque aussi

(*a*) *Coll. mathem. pref. liv.* 3.

communes que les prétendues Quadratures du cercle, & même rien n'est plus ordinaire que de voir ceux qui se vantent d'être en possession du dernier problême, annoncer en même tems les deux autres. *Oronce Finée*, *Joseph Scaliger*, *Delaleu*, les sieurs *Clerget*, *Liger*, &c. en sont des exemples. Je pourrois aisément former un article assez étendu de leurs malheureuses tentatives ; mais les mêmes raisons qui m'ont fait terminer le chapitre précédent, malgré l'abondante matiere qui se présentoit encore pour le grossir, me font mettre fin à celui-ci. S'il est certaines erreurs qui méritent l'attention des Philosophes, il n'en est assurément pas ainsi de celles de ces pygmées en geométrie, elles ne sont dignes que de l'oubli qui les dérobe à la connoissance des Géometres.



Addition au Chapitre III.

ON a dit dans ce chapitre, en parlant de la démonſtration que M. *Gregori* a voulu donner de l'impoſſibilité de la Quadrature du cercle, qu'elle ne concluoit bien qu'à l'égard de l'indéfinie. Après avoir réfléchi plus attentivement ſur cette démonſtration, il me paroît que M. *Gregori* a eu raiſon d'en déduire l'impoſſibilité de la Quadrature même définie du cercle; car s'il eſt vrai, comme il ſemble qu'on ne peut le lui conteſter, qu'en général le rapport d'un ſegment ou d'un ſecteur au polygone inſcrit ou circonſcrit ne peut être exprimé par une fonction finie, il eſt évident que cela aura également lieu à l'égard du cercle entier, & de quelque ſegment ou ſecteur particulier que ce ſoit. Il n'y aura donc dans le cercle aucun ſegment ou ſecteur dont le rapport avec une figure rectiligne puiſſe

être exprimé en termes finis ; ce qui exclut la Quadrature du cercle entier, & de tout autre ſegment quelconque.

FIN.

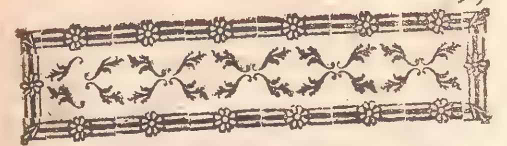


TABLE ALPHABETIQUE DES MATIERES.

Le nombre romain désigne le chapitre, & le chiffre arabe indique l'article.

A.

H.

I.

K.

L.

M.

N.

O.

Fin de la Table des Matieres.



LIVRES
DE MATHEMATIQUE
Qui se trouvent chez le même Libraire.

Ouvrages de M. BELIDOR, *Colonel d'Infanterie, ancien Professeur Royal de Mathématiques, &c.*

NOuveau Cours de Mathématique à l'usage de l'Artillerie & du Génie, *in*-4°. avec 34 planches, 15 liv.

La Science des Ingénieurs dans la conduite des travaux de fortification & d'architecture civile, *in*-4°. grand papier, 24 liv.

Architecture Hydraulique, premiere partie, qui contient l'art de conduire, d'élever & de ménager les eaux pour les différens besoins de la vie, en deux vol. *in*-4°. grand papier, avec 100 planches, 40 liv.

Architecture Hydraulique, seconde partie, qui comprend l'art de diriger les eaux de la mer & des rivieres à l'avantage de la défense des Places, du commerce & de l'agriculture, en deux volumes *in*-4°. grand papier, enrichis de 120 planches, 50 liv.

Petit Dictionnaire portatif de l'Ingénieur, *in*-8°. *sous presse.*

D

Ouvrages de M. l'Abbé DEIDIER, *Professeur de Mathématiques aux Ecoles d'Artillerie de la Fere.*

Arithmétique des Géometres, ou Nouveaux Elémens des Mathématiques, contenant l'arithmétique, l'algébre, l'analyse, les équations du second & du troisiéme dégré, &c. *in* 4°. Nouvelle édition. *Sous presse.*

La Science du Géometre, contenant les élémens d'Euclide, la Trigonométrie, la Géométrie pratique, le Nivellement, l'Arpentage, les Sections coniques, &c. *in*-4°. avec près de 50 planches, 15 liv.

La Mesure des Surfaces & des Solides, par la connoissance des centres de gravité, & par l'arithmétique des infinis, *in*-4°. avec figures, 12 liv.

Le Calcul différentiel & le Calcul intégral expliqués & appliqués à la Géométrie, *in*-4°. avec figures, 15 liv.

La Méchanique générale, pour servir d'introduction aux sciences Physico-Mathématiques, qui renferme la statique, le jet des bombes, l'hydrostatique, l'airométrie & l'hydraulique, *in*-4°. avec figures, 15 liv.

Le parfait Ingénieur françois, ou la Fortification, suivant les systêmes de M. de Vauban & des autres Auteurs qui ont écrit sur cette science, avec l'attaque & la défense des Places. Nouvelle édition, augmentée, *in*-4°. enrichie de 50 planches, 15 liv.

Elémens généraux des parties des Mathématiques nécessaires à l'Artillerie & au Génie, en deux volumes *in*-4°. avec plus de 60

planches, 1745. 24 liv.

Lettres d'un Mathématicien à un Abbé, où l'on prouve que la matiere n'est pas divisible à l'infini, *in*-12, 2 liv.

Lettre de M. de Mairan à Madame la M. du Ch. avec sa Dissertation sur les forces motrices des corps, & la nouvelle réfutation des forces vives; par M. l'Abbé Deidier, *in*-12, 3 liv.

Ouvrages de M. OZANAM, *de l'Académie des Sciences.*

Cours de Mathématique, qui comprend les parties de cette science les plus utiles à un homme de guerre, en cinq volumes *in*-8°. avec plus de 200 planches, 40 liv.

Les Récréations Mathématiques & Physiques, contenant plusieurs problêmes curieux d'arithmétique, de géométrie, de méchanique, d'optique, de gnomonique & de physique, en quatre volumes *in*-8°. avec quantité de figures. Nouvelle édition, 20 liv.

Traités tirés du Cours de Mathématique d'Ozanam.

L'Arithmétique, où toutes les parties de cette science sont démontrées d'une maniere courte & facile, *in*-8°. *broch.* 2 liv.

La Trigonométrie rectiligne & sphérique, avec les Tables des sinus, tangentes & sécantes, & des logarithmes. Par Adrien Wlacq, *in*-8°. 4 liv. 10 s.

La Méchanique, où il est traité des machines

ſimples & compoſées, &c. *in*-8°. 6 liv.

La Perſpective théorique & pratique, où l'on enſeigne la méthode de mettre toutes ſortes d'objets en perſpective, &c. *in*-8°. avec figures, 6 liv.

La Gnomonique, où l'on donne la maniere de faire des Cadrans ſolaires ſur toutes ſortes de ſurfaces, &c. *in*-8°. avec 30 planches, 6 liv.

Les Elémens d'Euclide du P. Deſchales, avec l'uſage de chaque propoſition pour toutes les parties des mathématiques. Par M. Audierne, *in*-12. avec 20 planches. Nouvelle édition, 1753. 3 liv.

Traité de l'Arpentage & du Toiſé, avec un nouveau tarif pour les bois de charpente, *in*-12. nouvelle édition, augmentée. 1747. 3 liv.

La Géométrie pratique, contenant la trigonométrie, la longimétrie, la planimétrie & la ſtéréométrie, avec un Traité de l'arithmétique par géométrie, *in*-12, avec figures, 2 liv. 10 ſ.

Uſage du Compas de proportion & de l'inſtrument univerſel, avec un Traité de la diviſion des champs, *in*-12. avec figures. Nouvelle édition, 1748. 2 liv. 10 ſ.

Méthode de lever les Plans & les Cartes de terre & de mer, avec toutes ſortes d'inſtrumens & ſans inſtrumens, *in*-12. avec figures. Nouvelle édition, augmentée, 1750. 2 liv. 10 ſ.

Méthode générale pour tracer les Cadrans ſur toutes ſortes de plans, *in*-12. avec figures. Nouvelle édition. *Sous preſſe.*








22
QUADRAT
DU
CERCLE
3

colorchecker CLASSIC

calibrite

mm